Del 1

Oppgave 1

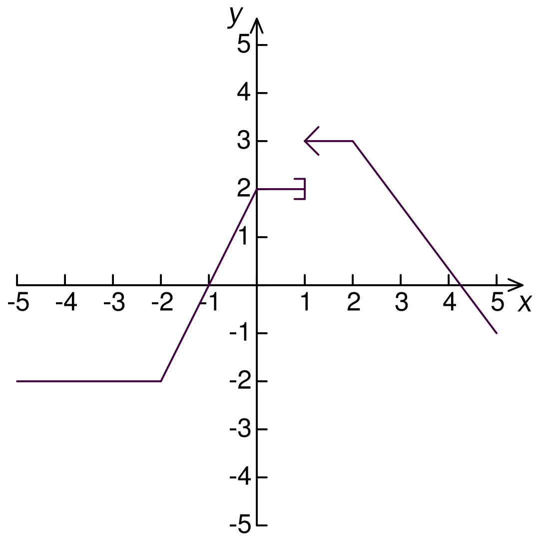
a) Deriver funksjonen $f(x) = 5e^{3x}$

b) Deriver funksjonen $g(x) = x^3 \cdot \ln(2x)$

c) Likningen $2x^3 - 10x^2 - 2x + 10 = 0$ har tre løsninger. Vis at $x_1 = 1$ er en løsning og finn de to andre.

d) Skriv så enkelt som mulig $\lg\left(a^2 b\right) - \lg\left(\dfrac{1}{ab}\right)$

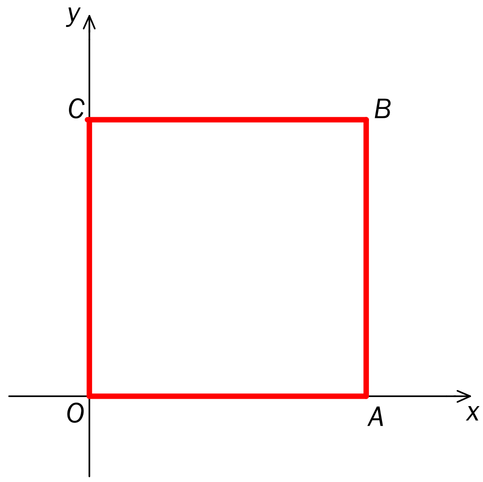
e) Figuren nedenfor viser grafen til en funksjon.



1) Bestem *x*-verdien til eventuelle punkter der funksjonen ikke er kontinuerlig. Begrunn svaret ditt.

2) Bestem *x*-verdien til eventuelle punkter der funksjonen ikke er deriverbar. Begrunn svaret ditt.

f) Bestem grenseverdien $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 - x}{x+1}$



g) Et kvadrat *OABC* med side a er plassert i et koordinatsystem. Hjørnet O er i origo, og A ligger på førsteaksen. Se figuren til høyre.

1) Bestem koordinatene til punktene A, B og C uttrykt ved a.

2) Vis at diagonalene i kvadratet står vinkelrett på hverandre.

h) Vi har punktene $A(1, 2)$, $B(2, 4)$ og $C(6, 2)$.

1) En linje l går gjennom A og B. Bestem en parameterframstilling for l.

2) En linje m går gjennom C og er parallell med vektoren $[-2, 1]$. Finn skjæringspunktet mellom l og m ved regning.

Oppgave 2

Den italienske matematikeren Vincenzo Viviani (1622–1703) har fått følgende setning i geometrien oppkalt etter seg:

> Et punkt P plasseres vilkårlig inne i en likesidet trekant ABC. Da er summen av avstandene fra P til hver av trekantens sider lik høyden i trekanten.

a) Tegn en figur, sett på aktuelle symboler (bokstaver) og formuler Vivianis setning med matematiske symboler.

b) Skriv arealet av trekanten på to forskjellige måter, og bruk dette til å bevise Vivianis setning.

Del 2

Oppgave 3

Vi bruker en test for å undersøke om en person har en bestemt sykdom.

Vi definerer hendelsene:

T: Testen tyder på at personen har sykdommen.

S: Personen har faktisk sykdommen.

a) Vi har $P(T \mid S) = 0{,}96$ og $P(T \mid \overline{S}) = 0{,}05$. Forklar hva disse sannsynlighetene forteller oss.
Bestem $P(\overline{T} \mid \overline{S})$.

Vi antar at 3 % av befolkningen har denne sykdommen. En tilfeldig valgt person skal testes.

b) Bestem $P(T)$.

c) Dersom testen tyder på at personen har sykdommen, hva er da sannsynligheten for at denne personen faktisk har sykdommen?

d) Dersom testen tyder på at personen ikke har sykdommen, hva er da sannsynligheten for at personen likevel faktisk har sykdommen?

Oppgave 4

Du skal svare på <u>enten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen din inneholder deler av begge oppgavene,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

Posisjonen til en partikkel etter t sekunder er gitt ved

$$\vec{r}(t) = \left[4t - 3t \cdot e^{-t}\ ,\ 5t \cdot e^{-t}\right] \quad \text{der} \quad t \geq 0$$

Enheten langs aksene er meter. Andrekoordinaten er høyden over bakken.

a) Hva er posisjonen til partikkelen etter ett sekund? Tegn grafen til $\vec{r}$.

b) Finn fartsvektoren og akselerasjonsvektoren ved regning.

c) Bestem farten (absoluttverdien av fartsvektoren) etter to sekunder.

d) Finn ved regning når partikkelen er i det høyeste punktet.

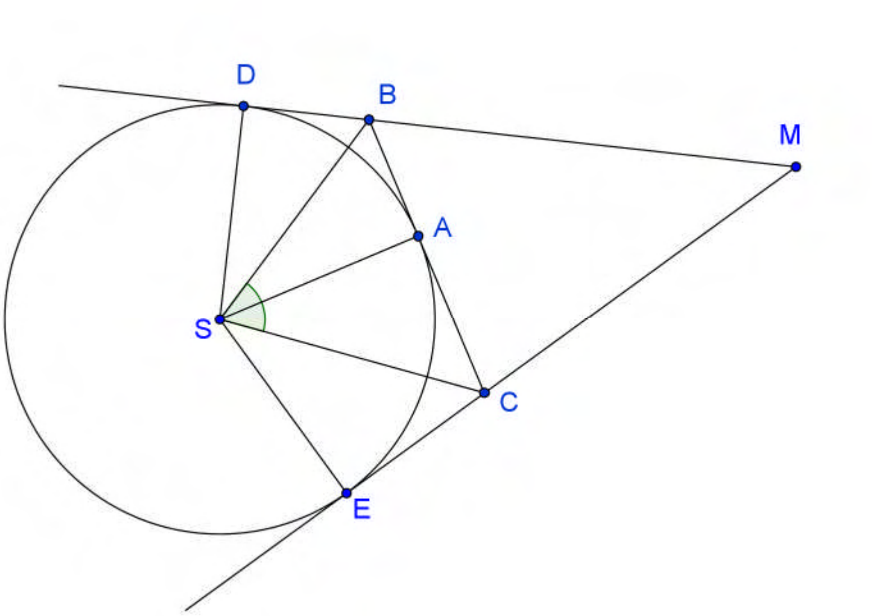
e) Bestem vinkelen mellom posisjonsvektoren og fartsvektoren i det høyeste punktet.

Alternativ II

I denne oppgaven kan det være en fordel å bruke digitalt verktøy.

Vi har en sirkel med sentrum i S og et punkt M utenfor sirkelen. Hver av sidene i trekanten CMB ligger på en tangent til sirkelen.

Tangentene gjennom M og D og gjennom M og E ligger fast. Tangenten gjennom B og C kan varieres. Denne tangenten tangerer sirkelen i punktet A. A ligger på den korteste buen mellom D og E. Se figuren nedenfor.



I denne oppgaven skal du undersøke om denne sammenhengen gjelder:

For alle mulige plasseringer av tangeringspunktet A er $\angle CSB$ konstant.

a) Bruk dynamisk programvare eller passer og linjal til å konstruere en figur som stemmer med beskrivelsen ovenfor. Flytt punktet A, og observer hver gang størrelsen til $\angle CSB$. Hvor godt stemmer sammenhengen ovenfor med dine observasjoner?

b) Forklar at:

1) trekantene SDB og SAB er kongruente (like)

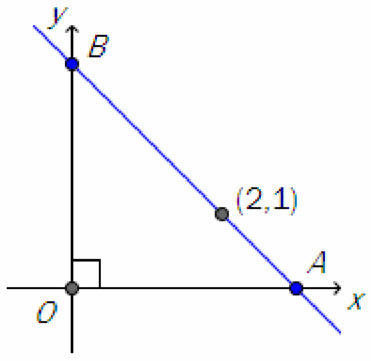
2) trekantene SEC og SAC er kongruente (like)

3) $\angle CSB = \dfrac{1}{2} \cdot \angle ESD$

c) Bruk resultatene i b) til å forklare at $\angle CSB$ er konstant.

Oppgave 5

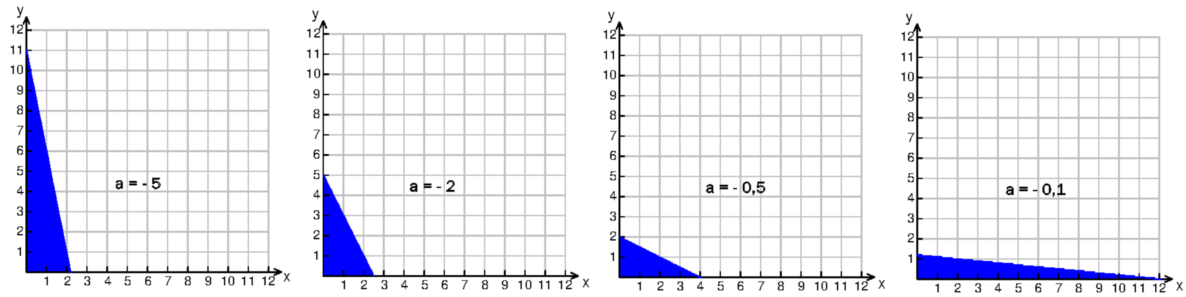
En rett linje med stigningstall a går gjennom punktet $(2, 1)$. Linjen skal synke mot høyre.



a) Vis at ligningen til linjen kan skrives som

$$y = ax - 2a + 1 \quad , \quad \text{der } a < 0$$

Vi kaller skjæringspunktet med *x*-aksen for A og skjæringspunktet med *y*-aksen for B.
Vi lar $F(a)$ være arealet av trekanten OAB. O er origo. Skissene nedenfor viser trekantene for $a = -5$, $a = -2$, $a = -0{,}5$ og $a = -0{,}1$.



I denne oppgaven skal du finne ut hvilken a-verdi som gjør arealet minst.

b) Vis at $F(a) = -\dfrac{(2a-1)^2}{2a}$

c) Tegn grafen til F. Velg a-verdier i intervallet $\left[-5,\ -\dfrac{1}{10}\right]$. Bruk grafen til å finne det minste arealet og det tilhørende stigningstallet til linjen.

d) Vis ved regning at $F'(a) = \dfrac{(2a-1)\cdot(-2a-1)}{2a^2}$

e) Tegn fortegnslinjen til $F'(a)$ og bruk den til å finne det minste arealet. Hva er ligningen til linjen når arealet er minst?