DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

b) $g(x) = x^2 e^x$

c) $h(x) = \ln(x^3 - 1)$

Oppgave 2 (2 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

$$2\ln b - \ln\left(\frac{1}{b}\right) - \ln(ab^2) + \ln\left(\frac{a}{b^2}\right)$$

Oppgave 3 (6 poeng)

Vektorene $\vec{a} = [3,\ 1]$, $\vec{b} = [4,\ 2]$ og $\vec{c} = [t+1,\ 3]$ er gitt, der $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestem $\vec{a} - 2\vec{b}$

b) Bestem $\vec{a} \cdot \vec{b}$

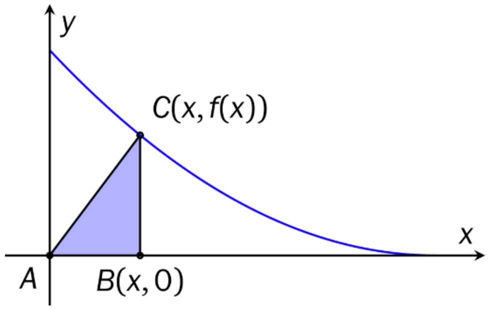
c) Bestem *t* slik at $\vec{b} \parallel \vec{c}$

d) Bestem *t* slik at $|\vec{c}| = |\vec{a}|$

Oppgave 4 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2(x-3)^2 \quad , \qquad 0 < x < 3$$



En rettvinklet $\triangle ABC$ er gitt ved punktene $A(0, 0)$, $B(x, 0)$ og $C(x, f(x))$. Se skissen til høyre.

a) Vis at arealet F til $\triangle ABC$ kan skrives som

$$F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

b) Bestem x slik at arealet til $\triangle ABC$ blir størst mulig.

c) Bestem arealet når $x = 2$. Er det andre x-verdier som gir dette arealet?

Oppgave 5 (6 poeng)

En nøkkelboks er en boks med plass til nøkler. Noen slike bokser har kodelås.

For én type nøkkelboks lages en kode ved å stille inn fire tall. Hvert tall velges blant tallene 0 til 9. Et tall kan velges flere ganger. Tallene må være stilt inn i en bestemt rekkefølge.

a) Hvor mange ulike koder finnes det for denne typen nøkkelboks?

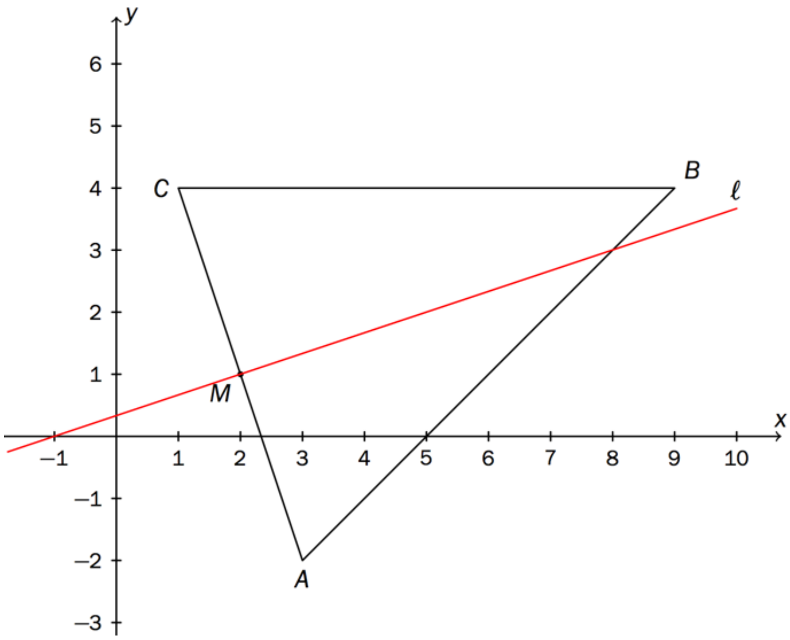
For en annen type nøkkelboks lages en kode ved å velge et bestemt antall forskjellige tall blant tallene 0 til 9. Tallene trenger ikke å være stilt inn i en bestemt rekkefølge.

b) Hvor mange ulike koder finnes for denne typen nøkkelboks dersom koden skal bestå av fire forskjellige tall?

c) Hvor mange tall må koden bestå av for at antallet mulige koder skal bli størst mulig? Hvor mange mulige koder er det da?

Oppgave 6 (7 poeng)

En $\triangle ABC$ har hjørnene $A(3,-2)$, $B(9,\ 4)$ og $C(1,\ \ 4)$. Punktet M er midtpunktet på AC.



a) Vis ved vektorregning at M har koordinatene $M(2,\ 1)$.

La ℓ være midtnormalen til AC.

b) Forklar at

$$\ell : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

er en parameterframstilling for ℓ.

c) Avgjør om punktet $\left(12,\ \dfrac{9}{2}\right)$ ligger på ℓ.

d) Bestem koordinatene til skjæringspunktet mellom ℓ og midtnormalen til AB.

Oppgave 7 (3 poeng)

Nedenfor er det gitt noen utsagn. Skriv av utsagnene. I boksen mellom utsagnene skal du sette inn ett av symbolene $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ eller $\Leftrightarrow$. Husk å begrunne svarene.

a) $x^2 = 1$ $\boxed{}$ $x = 1$

b) $f(x) = 5x^2 - 1$ $\boxed{}$ $f'(x) = 10x$

Oppgave 8 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = e^{1-x}$$

Grafen til f har en tangent som går gjennom origo. Bestem likningen for denne tangenten.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Jakob har en spilleliste med 20 sanger på mobilen sin. Fire av sangene på spillelisten er med artisten Kygo. Programmet spiller av sangene i tilfeldig rekkefølge (shuffle) med tilbakelegging. Det vil si at samme sang kan bli spilt av flere ganger etter hverandre.

a) Forklar at sannsynligheten alltid er $p = 0{,}2$ for at neste sang som blir spilt, er med Kygo.

b) Jakob vil høre på fem avspillinger fra spillelisten. Bestem sannsynligheten for at nøyaktig to av sangene han spiller, er med Kygo.

c) Hvor mange avspillinger må han høre på for at sannsynligheten for å få høre minst én sang med Kygo skal være større enn 90 %?

Oppgave 2 (5 poeng)

En $\triangle ABC$ har hjørnene $A(3, 5)$, $B(6,5)$ og $C(7,9)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og bruk vektorregning til å bestemme $\angle BAC$.

Tyngdepunktet T til en trekant med hjørnene A, B og C er generelt gitt ved

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),\ \text{der } O \text{ er origo.}$$

b) Bestem, ved vektorregning, koordinatene til tyngdepunktet T til $\triangle ABC$.

En $\triangle DEF$ er gitt. To av hjørnene er $D(2,3)$ og $E(-3,5)$. Tyngdepunktet er $S(4, 2)$.

c) Bestem koordinatene til hjørnet F.

Oppgave 3 (8 poeng)

Funksjonen *f* er gitt ved

$$f(x) = 2\ln(x^2 + 4) - \frac{1}{2}x$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til *f* når $x \in \langle -4, 16 \rangle$

b) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkt på grafen til *f*.

Funksjonen *g* er gitt ved

$$g(x) = 2\ln(x^2 + k) - \frac{1}{2}x \quad , \quad k > 0 \ .$$

c) Bruk CAS til å bestemme *k* slik at *g* har et ekstremalpunkt i $x = 1$.

d) Bruk blant annet CAS til å bestemme hvor mange ekstremalpunkt g har for ulike verdier av *k*.

Oppgave 4 (6 poeng)

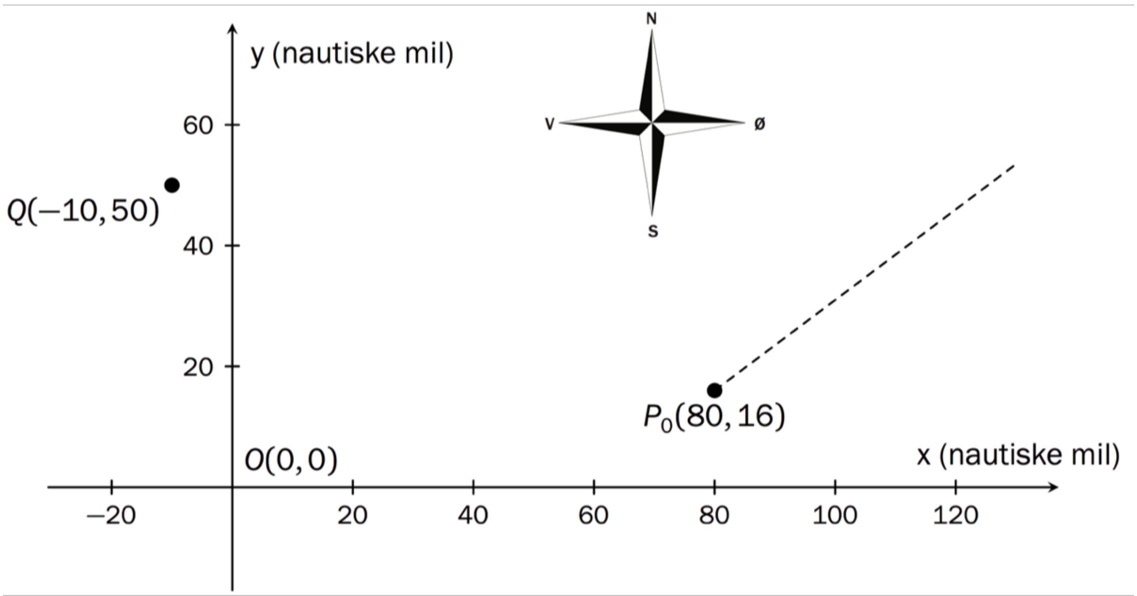
På havet måles avstander i nautiske mil (nm).

1 nm = 1852 m

Skipet *Euler* sender ut en melding om at det har fått motorstopp. Kapteinen oppgir at posisjonen er $P_0(80, 16)$ i et bestemt koordinatsystem. På grunn av avdriften vil posisjonen P (i nm) t timer senere være gitt ved

$$\overrightarrow{OP} = [80 + 4t,\ 16 + 3t]$$

a) Hvilken fartsvektor $\vec{v}$ driver skipet med? Hvor stor er farten (banefarten)?



En redningsbåt som ligger i O, sier at den er klar til å gå mot skipet og kan være ved *Euler* om 4 timer.

b) Hvor stor fart holder redningsbåten?

En annen redningsbåt er i posisjonen $Q(-10, 50)$ når meldingen blir sendt. Den kan holde en fart på 35 nm/h.

c) Bruk CAS til å bestemme hvor lang tid det vil gå før denne redningsbåten kan være framme ved *Euler*.