Eksamen

13.11.2019

REA3022 Matematikk R1

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel	Del 1: Skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar (På del 1 er det ikkje tillate å bruke datamaskin.) Del 2: Alle hjelpemiddel er tillatne, bortsett frå opent Internett og andre verktøy som kan brukast til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemiddel under eksamen, har du ikkje lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måtar å utveksle informasjon med andre er ikkje tillate.
Informasjon om oppgåva	Del 1 har 7 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast.
Kjelder	Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderinga	Sjå eksamensrettleiinga med kjenneteikn på måloppnåing til sentralt gitt skriftleg eksamen. Eksamensrettleiinga finn du på Utdanningsdirektoratets nettsider
Vedlegg	Vedlegg 1: Binomisk og hypergeometrisk fordeling

Del 1

Oppgåve 1 (5 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = x^4 - 2x + \ln x$

b) $g(x) = x^7 \cdot e^x$

c) $h(x) = \dfrac{\ln(2x)}{x^2}$

Oppgåve 2 (2 poeng)

Skriv så enkelt som mogleg

$$4\ln(a \cdot b^3) - 3\ln(a \cdot b^2) - \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

Oppgåve 3 (5 poeng)

Polynomet P er gitt ved

$$P(x) = x^3 + 6x^2 + k \cdot x - 30$$

a) Grunngi at k må vere lik -1 for at divisjonen $P(x):(x-2)$ skal gå opp.

b) Faktoriser $x^3 + 6x^2 - x - 30$ i lineære faktorar.

c) Løys ulikskapen $x^3 + 6x^2 \leq x + 30$.

Oppgåve 4 (6 poeng)

Firkanten $ABCD$ er gitt ved $A(-2,1)$, $B(2,-1)$, $C(4,2)$ og $D(t,3)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BC}$.

b) Avgjer om $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

c) Bruk vektorrekning til å bestemme t slik at $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.

d) For kva verdiar av t er firkanten $ABCD$ eit trapes?

Oppgåve 5 (6 poeng)

I ei R1-gruppe kjem 7 elevar frå klasse A og 5 elevar frå klasse B. Blant desse 12 elevane skal det veljast tilfeldig ein komité som skal bestå av 3 elevar frå klasse A og 2 elevar frå klasse B.

a) Kor mange slike komitear er det mogleg å setje saman?

Anne og Jens er elevar i R1-gruppa. Anne går i klasse A, og Jens går i klasse B.

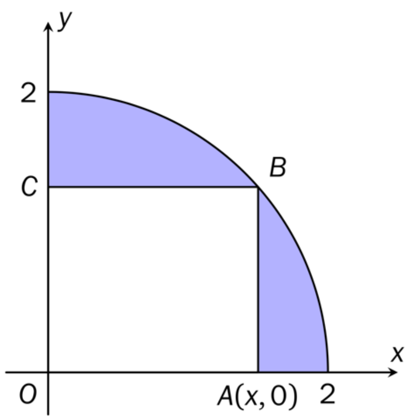
b) Bestem sannsynet for at både Anne og Jens blir med i komiteen.

c) Bestem sannsynet for at berre éin av dei blir med i komiteen.

Oppgåve 6 (4 poeng)

Skissa til høgre viser ein kvartsirkel med radius 2.

Firkanten $OABC$ er eit rektangel, der O er origo, A ligg på x-aksen, B på kvartsirkelen og C på y-aksen.



a) Vis at arealet F til det fargelagde området er gitt ved

$$F(x) = \pi - x\sqrt{4-x^2} \quad , \qquad 0 \leq x \leq 2$$

b) Kva er det minste arealet det fargelagde området kan ha?

Oppgåve 7 (8 poeng)

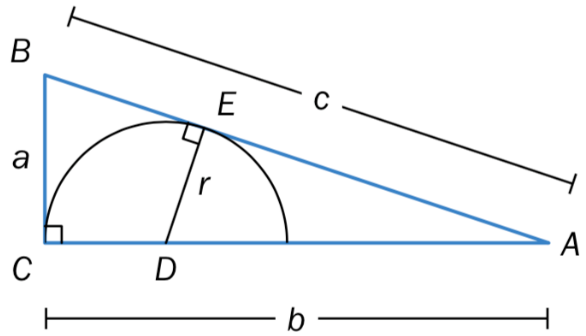
I denne oppgåva skal vi bevise Pytagoras' setning.

I ein rettvinkla trekant ABC med sidene a, b og c har vi teikna ein innskriven halvsirkel med sentrum i D og radius $r = DC = DE$. Halvsirkelen tangerer hypotenusen i punktet E. Sjå figuren.

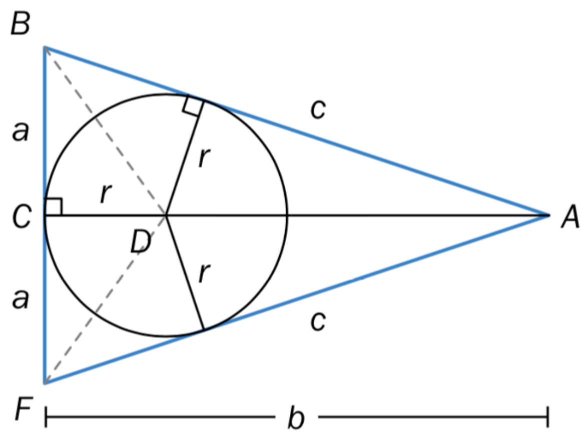
a) Grunngi at $\triangle CEB$ er likebeint.
Bruk dette til å vise at $EA = c - a$.

b) Grunngi at $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. Bruk dette til å vise at

$$r = \frac{a \cdot (c - a)}{b}$$



Vi speglar heile figuren om AC og får ein trekant ABF med ein innskriven sirkel.



c) Vis ved arealbetraktningar at

$$a \cdot b = (a + c) \cdot r$$

d) Bruk resultata frå oppgåve b) og c) til å bevise Pytagoras' setning.

Del 2

Oppgåve 1 (6 poeng)

Av alle epostane som blir sende til Arnt, er 80 % søppelpost (spam), det vil seie uønskt reklame som blir send via epost. Det viser seg at 85 % av epostane som er søppelpost, inneheld eitt eller fleire ord frå ei bestemt liste. Av epostar som ikkje er søppelpost, er det berre 3 % som inneheld eitt eller fleire ord frå denne lista.

a) Bestem sannsynet for at ein tilfeldig epost send til Arnt inneheld eitt eller fleire ord frå lista.

b) Bestem sannsynet for at ein tilfeldig epost send til Arnt er søppelpost når han inneheld eitt eller fleire ord frå lista.

c) Bestem sannsynet for at ein tilfeldig epost send til Arnt er søppelpost sjølv om han ikkje inneheld nokon ord frå lista.

Oppgåve 2 (6 poeng)

Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x) = -x^3 + x^2 + k \cdot x + 2$$

a) For kva verdiar av k har grafen til f både eit toppunkt og eit botnpunkt?

b) Bestem k slik at grafen til f har eit toppunkt i $(2, f(2))$.
Bestem også koordinatane til botnpunktet for denne verdien av k.

c) Bestem koordinatane til vendepunktet til grafen, uttrykt ved k.
Bestem k slik at største momentane vekstfart til f er 2.

Oppgåve 3 (8 poeng)

To golfballar blir slått ut samtidig frå eit tak som er 20 meter over bakkenivå.

Posisjonen til ball 1 er gitt ved vektorfunksjonen

$$\vec{r}_1(t) = [17t\,,\ -5t^2 + 29t + 20]$$

Posisjonen til ball 2 er gitt ved vektorfunksjonen

$$\vec{r}_2(t) = [24t\,,\ -5t^2 + 25t + 20]$$

Her er t tida (målt i sekund) etter at ballane blei slått ut frå taket, og koordinatane er gitt i meter. Førstekoordinaten er posisjon i horisontal retning, og andrekoordinaten er høgda til ballen over bakkenivå.

a) Kor lang tid tar det før kvar av golfballane treffer bakken?

b) Teikn grafane til $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$.

c) Bestem banefarten til kvar av dei to golfballane idet dei forlèt taket.

Ved eit tidspunkt vil dei to golfballane ha same fartsretning.

d) Bestem dette tidspunktet.
Kva for vinkel dannar da fartsvektorane med *x*-aksen?

Oppgåve 4 (4 poeng)

Figur 1 viser grafen til funksjonen f gitt ved

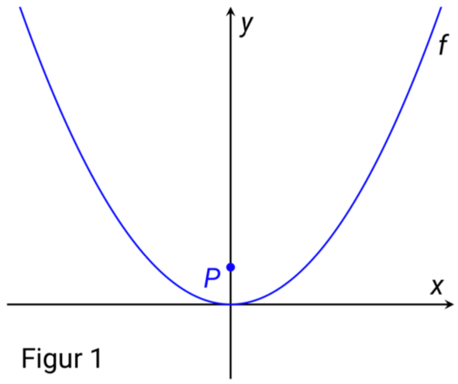
$$f(x)=\frac{1}{4p}x^2$$

der $p>0$ er eit reelt tal. Vi kallar grafen til ein slik funksjon for ein parabel. Punktet $P(0,\ p)$ kallar vi brennpunktet til parabelen.

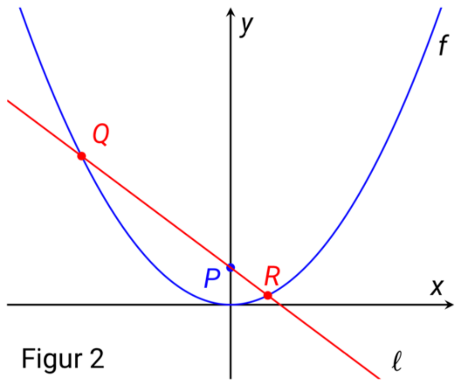
La $Q(q,f(q))$ vere eit generelt punkt på parabelen, og la ℓ vere linja som går gjennom P og Q. Linja ℓ skjer også parabelen i punktet R. Sjå figur 2.

a) Bruk CAS til å vise at x-koordinaten til punktet R er $-\dfrac{4p^2}{q}$.

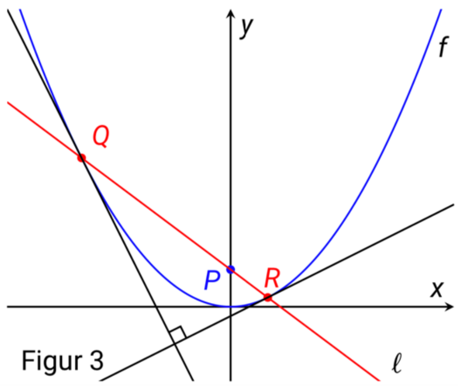
b) Bruk CAS til å vise at tangentane til grafen til f i punkta Q og R står normalt på kvarandre. Sjå figur 3.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer. Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler	Del 1: Skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. (På del 1 er det ikke tillatt å bruke datamaskin.) Del 2: Alle hjelpemidler er tillatt, bortsett fra åpent Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemiddel under eksamen, har du ikke lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måter å utveksle informasjon med andre er ikke tillatt.
Informasjon om oppgaven	Del 1 har 7 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres.
Kilder	Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderingen	Se eksamensveiledningen med kjennetegn på måloppnåelse til sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på Utdanningsdirektoratets nettsider.
Vedlegg	Vedlegg 1: Binomisk og hypergeometrisk fordeling

Del 1

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = x^4 - 2x + \ln x$

b) $g(x) = x^7 \cdot e^x$

c) $h(x) = \dfrac{\ln(2x)}{x^2}$

Oppgave 2 (2 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

$$4\ln(a \cdot b^3) - 3\ln(a \cdot b^2) - \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

Oppgave 3 (5 poeng)

Polynomet P er gitt ved

$$P(x) = x^3 + 6x^2 + k \cdot x - 30$$

a) Begrunn at k må være lik -1 for at divisjonen $P(x):(x-2)$ skal gå opp.

b) Faktoriser $x^3 + 6x^2 - x - 30$ i lineære faktorer.

c) Løs ulikheten $x^3 + 6x^2 \leq x + 30$.

Oppgave 4 (6 poeng)

Firkanten $ABCD$ er gitt ved $A(-2,1)$, $B(2,-1)$, $C(4,2)$ og $D(t,3)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BC}$.

b) Avgjør om $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

c) Bruk vektorregning til å bestemme t slik at $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.

d) For hvilke verdier av t er firkanten $ABCD$ et trapes?

Oppgave 5 (6 poeng)

I en R1-gruppe kommer 7 elever fra klasse A og 5 elever fra klasse B. Blant disse 12 elevene skal det velges tilfeldig en komité som skal bestå av 3 elever fra klasse A og 2 elever fra
klasse B.

a) Hvor mange slike komiteer er det mulig å sette sammen?

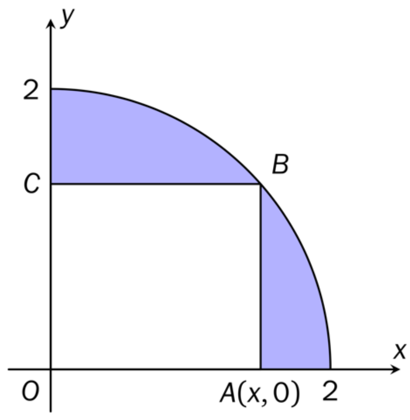
Anne og Jens er elever i R1-gruppen. Anne går i klasse A, og Jens går i klasse B.

b) Bestem sannsynligheten for at både Anne og Jens blir med i komiteen.

c) Bestem sannsynligheten for at bare én av dem blir med i komiteen.

Oppgave 6 (4 poeng)

Skissen til høyre viser en kvartsirkel med radius 2. Firkanten $OABC$ er et rektangel, der O er origo, A ligger på x-aksen, B på kvartsirkelen og C på y-aksen.



a) Vis at arealet F til det fargelagte området er gitt ved

$$F(x) = \pi - x\sqrt{4-x^2} \ , \quad 0 \leq x \leq 2$$

b) Hva er det minste arealet det fargelagte området kan ha?

Oppgave 7 (8 poeng)

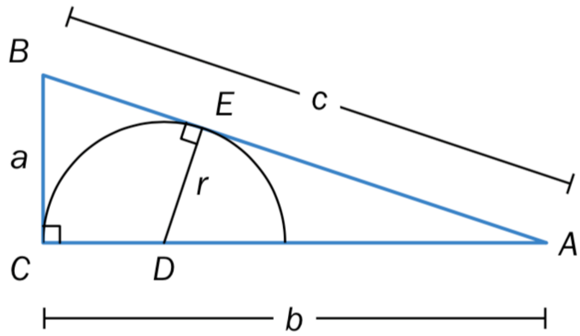
I denne oppgaven skal vi bevise Pytagoras' setning.

I en rettvinklet trekant ABC med sidene a, b og c har vi tegnet en innskrevet halvsirkel med sentrum i D og radius $r = DC = DE$. Halvsirkelen tangerer hypotenusen i punktet E. Se figuren.

a) Begrunn at $\triangle CEB$ er likebeint.
Bruk dette til å vise at $EA = c - a$.

b) Begrunn at $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. Bruk dette til å vise at

$$r = \frac{a \cdot (c-a)}{b}$$

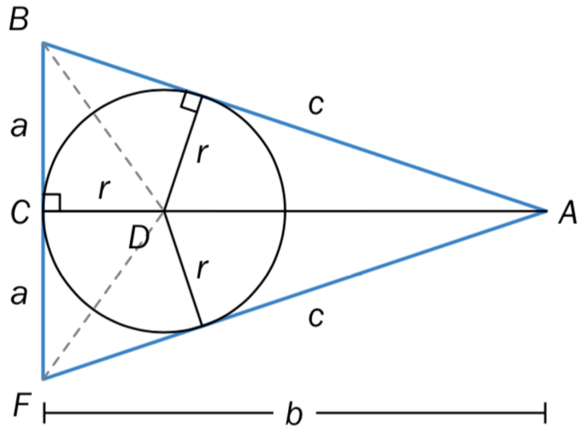


Vi speiler hele figuren om AC og får en trekant ABF med en innskrevet sirkel.

c) Vis ved arealbetraktninger at

$$a \cdot b = (a+c) \cdot r$$

d) Bruk resultatene fra oppgave b) og c) til å bevise Pytagoras' setning.



Del 2

Oppgave 1 (6 poeng)

Av alle epostene som blir sendt til Arnt, er 80 % søppelpost (spam), det vil si uønsket reklame som blir sendt via epost. Det viser seg at 85 % av epostene som er søppelpost, inneholder ett eller flere ord fra en bestemt liste. Av eposter som ikke er søppelpost, er det bare 3 % som inneholder ett eller flere ord fra denne listen.

a) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig epost sendt til Arnt inneholder ett eller flere ord fra listen.

b) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig epost sendt til Arnt er søppelpost når den inneholder ett eller flere ord fra listen.

c) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig epost sendt til Arnt er søppelpost selv om den ikke inneholder noen ord fra listen.

Oppgave 2 (6 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = -x^3 + x^2 + k \cdot x + 2$$

a) For hvilke verdier av k har grafen til f både et toppunkt og et bunnpunkt?

b) Bestem k slik at grafen til f har et toppunkt i $(2, f(2))$.
Bestem også koordinatene til bunnpunktet for denne verdien av k.

c) Bestem koordinatene til vendepunktet til grafen, uttrykt ved k.
Bestem k slik at største momentane vekstfart til f er 2.

Oppgave 3 (8 poeng)

To golfballer blir slått ut samtidig fra et tak som er 20 meter over bakkenivå.

Posisjonen til ball 1 er gitt ved vektorfunksjonen

$$\vec{r}_1(t) = [17t\ ,\ -5t^2 + 29t + 20]$$

Posisjonen til ball 2 er gitt ved vektorfunksjonen

$$\vec{r}_2(t) = [24t\ ,\ -5t^2 + 25t + 20]$$

Her er t tiden (målt i sekunder) etter at ballene ble slått ut fra taket, og koordinatene er gitt i meter. Førstekoordinaten er posisjon i horisontal retning, og andrekoordinaten er høyden til ballen over bakkenivå.

a) Hvor lang tid tar det før hver av golfballene treffer bakken?

b) Tegn grafene til $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$.

c) Bestem banefarten til hver av de to golfballene idet de forlater taket.

Ved et tidspunkt vil de to golfballene ha samme fartsretning.

d) Bestem dette tidspunktet.
Hvilken vinkel danner da fartsvektorene med *x*-aksen?

Oppgave 4 (4 poeng)

Figur 1 viser grafen til funksjonen f gitt ved

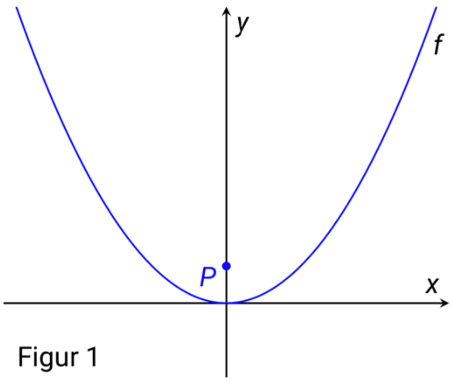
$$f(x)=\frac{1}{4p}x^2$$

der $p>0$ er et reelt tall. Vi kaller grafen til en slik funksjon for en parabel. Punktet $P(0,p)$ kaller vi for parabelens brennpunkt.

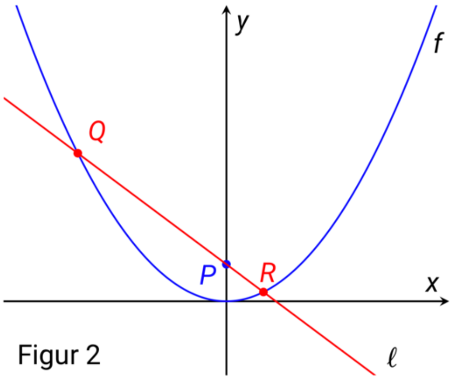
La $Q(q,f(q))$ være et generelt punkt på parabelen, og la ℓ være linjen som går gjennom P og Q. Linjen ℓ skjærer også parabelen i punktet R. Se figur 2.

a) Bruk CAS til å vise at x-koordinaten til punktet R er $-\dfrac{4p^2}{q}$.

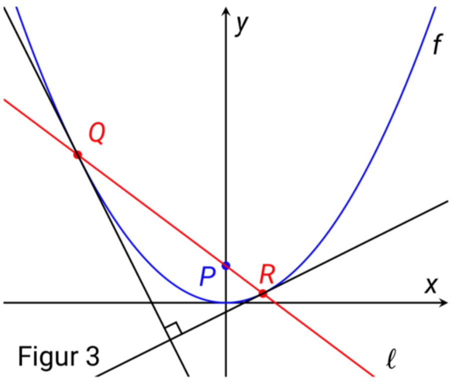
b) Bruk CAS til å vise at tangentene til grafen til f i punktene Q og R står normalt på hverandre. Se figur 3.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

Vedlegg 1

Binomisk fordeling:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

Hypergeometrisk fordeling:

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\cdot\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Blank side

Blank side

Blank side

Utdannings-
direktoratet

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!