Utdanningsdirektoratet

Eksamen

11.11.2020

REA3022 Matematikk R1

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel	Del 1: Skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar (På Del 1 er det ikkje tillate å bruke datamaskin.) Del 2: Alle hjelpemiddel er tillatne, bortsett frå opent Internett og andre verktøy som kan brukast til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemiddel under eksamen, har du ikkje lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måtar å utveksle informasjon med andre på er ikkje tillate.
Informasjon om oppgåva	Del 1 har 9 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast.
Kjelder	Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderinga	Sjå eksamensrettleiinga med kjenneteikn på måloppnåing til sentralt gitt skriftleg eksamen. Eksamensrettleiinga finn du på Utdanningsdirektoratets nettsider.
Vedlegg	Vedlegg 1: Binomisk og hypergeometrisk fordeling

Del 1

Oppgåve 1 (5 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = x^2 + \mathrm{e}^x$

b) $g(x) = x^3 \cdot \sqrt{2x-1}$

c) $h(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

Oppgåve 2 (2 poeng)

Skriv så enkelt som mogleg

$$2\ln(a^3b^4) - 3\ln a - 3\ln(ab^2)$$

Oppgåve 3 (5 poeng)

a) Vis at $x = 2$ er ei løysing av likninga

$$x^3 + 2x^2 = 5x + 6$$

b) Løys ulikskapen

$$x^3 + 2x^2 < 5x + 6$$

c) Lag ein ulikskap som har løysingsmengda $\langle \leftarrow, -1 \rangle \cup [2, \rightarrow\rangle$

Oppgåve 4 (4 poeng)

Posisjonsvektoren til ein partikkel er gitt ved vektorfunksjonen

$$\vec{r}(t)=\left[4t+2,\, 2t-5t^2\right]$$

a) Bestem eit uttrykk for fartsvektoren og eit uttrykk for akselerasjonsvektoren til partikkelen.

b) Når står fartsvektoren vinkelrett på akselerasjonsvektoren?

Oppgåve 5 (6 poeng)

Firkanten $ABCD$ er gitt ved $A(1,1)$, $B(6,2)$, $C(5,7)$ og $D(2,8)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $|\overrightarrow{AB}|$.

For ein firkant $PQRS$ er det matematiske tyngdepunktet T gitt ved

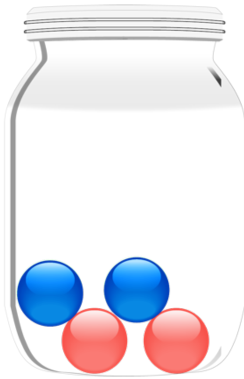
$$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}\right),\text{ der } O \text{ er origo.}$$

b) Bestem koordinatane til det matematiske tyngdepunktet til firkanten $ABCD$ ovenfor.

Vi har gitt punkta $E(0,3)$, $F(2,-2)$ og $G(7,3)$. Desse punkta dannar saman med punktet H ein firkant $EFGH$. Det matematiske tyngdepunktet i denne firkanten er $T(3,2)$.

c) Bestem koordinatane til H.

Oppgåve 6 (4 poeng)



Tore og Mia diskuterer kven som skal ta oppvasken. Dei legg 2 raude og 2 blå kuler i ei krukke og skal trekke 2 kuler tilfeldig (utan tilbakelegging) frå krukka. Mia foreslår at ho må ta oppvasken dersom dei 2 kulene har lik farge, medan Tore må ta oppvasken dersom dei 2 kulene har ulik farge.

a) Bestem sannsynet for at Mia må ta oppvasken dersom dei følger dette forslaget.

Tore meiner at dette er urettferdig. Han foreslår at dei skal legge fleire raude kuler i krukka.

b) Kor mange raude kuler må det minst ligge i krukka dersom sannsynet for at dei to kulene har ulik farge, er mindre enn 50 %?

Oppgåve 7 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=(x+2)(x^2+x+5)$$

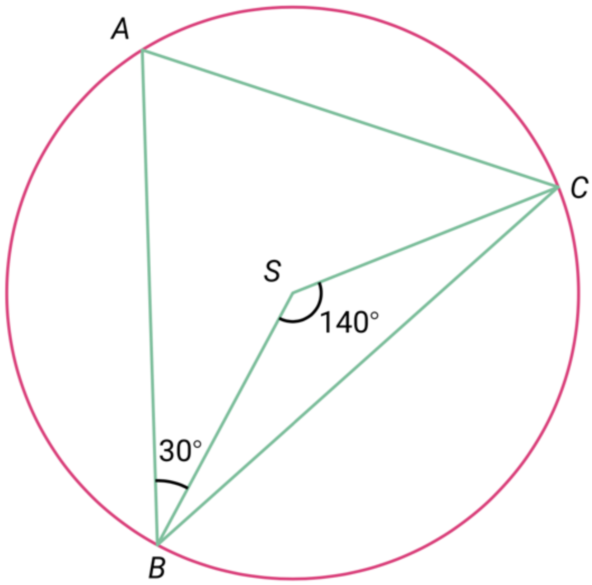
a) Vis at grafen til f er stigande for alle verdiar av x.

b) Bestem eventuelle vendepunkt på grafen til f.

c) Lag ei skisse av grafen til f.

Oppgåve 8 (2 poeng)

Punkta A, B og C ligg på ein sirkel med sentrum i S, slik skissa til høgre viser.



Bestem vinklane i trekanten ABC.

Oppgåve 9 (2 poeng)

I eit trapes $ABCD$ lar vi M vere midtpunktet på AD og N vere midtpunktet på BC. Sjå skissa.

Vis at $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

Del 2

Oppgåve 1 (6 poeng)

Agnete planlegg ein 14 dagars ferietur til sørkysten av Gran Canaria. Der er det i gjennomsnitt 300 soldagar i året.

Ho har gjort nokre berekningar og funne ut at sannsynet for at alle dei 14 dagane blir soldagar, er 6,4 %.

a) Forklar korleis ho kan ha komme fram til dette resultatet. Kva føresetnader ligg til grunn for berekningane?

Ein familie vurderer å reise på ein 14 dagars tur til sørkysten av Gran Canaria kvart år dei neste 8 åra.

b) Bestem sannsynet for at dei opplever berre soldagar på minst 2 av desse 8 framtidige feriereisene. Vi føreset at talet på soldagar i året ikkje endrar seg i løpet av desse åtte åra.

Ole planlegg ein 4 vekers ferietur til ein annan stad i verda. Eit reisebyrå oppgir at sannsynet for minst 22 soldagar på denne feriestaden i løpet av ein tilfeldig firevekersperiode er minst 90 %.

c) Kor mange soldagar i året må det minst vere i gjennomsnitt på denne staden for at påstanden frå reisebyrået skal vere sann?

Oppgåve 2 (8 poeng)

Rikard kastar ei kule. Etter t sekund er posisjonen $\vec{r}_A$ til kula gitt ved

$$\vec{r}_A(t) = [9t\,,\ 1 + 7t - 5t^2]$$

Eininga på aksane er meter, og *x*-aksen er langs bakken.

a) Kor langt kastar Rikard kula i *x*-retning?

Berit står 25 meter frå Rikard. Ho kastar ei kule i retning mot Rikard samtidig som Rikard kastar si kule. Etter t sekund er posisjonen $\vec{r}_B$ til Berits kule gitt ved

$$\vec{r}_B = [25 - 8t,\ 1 + 7t - 5t^2]$$

b) Teikn grafane til $\vec{r}_A$ og $\vec{r}_B$ i same koordinatsystem.

c) Vil dei to kulene treffe kvarandre?

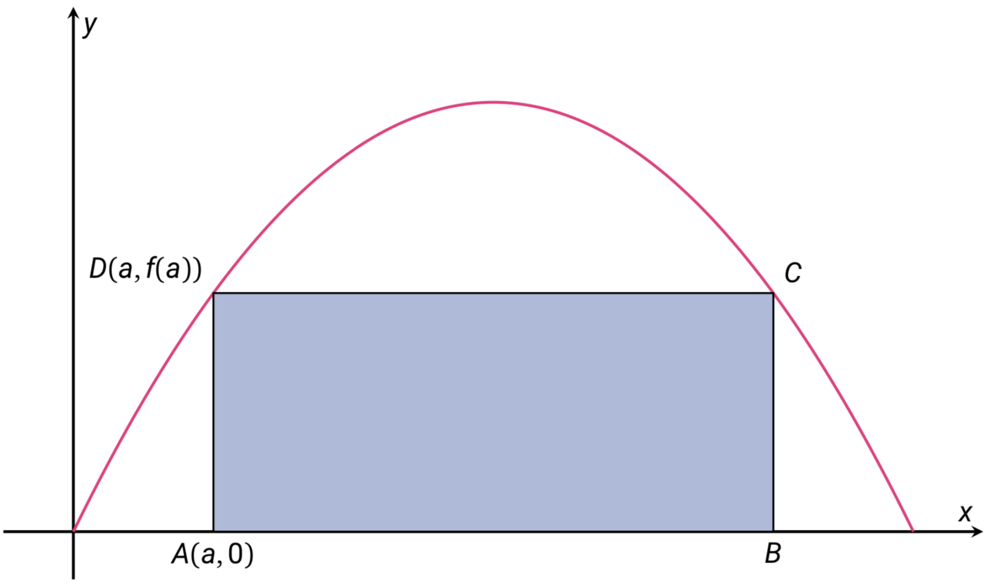
d) Ville svaret i oppgåve c) blitt annleis dersom Berit hadde stått nærmare Rikard da ho kasta kula? (Vi går ut frå at Berit kastar kula med same kraft og retning som når ho står 25 meter frå Rikard.)

Oppgåve 3 (3 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 6x - x^2 \quad , \quad x \in [0, 6]$$

Under har vi teikna grafen til f saman med rektangelet $ABCD$.
I rektangelet er $A(a,0)$ og $D(a,f(a))$, der $a \in \langle 0, 3 \rangle$. Punktet C ligg på grafen til f.

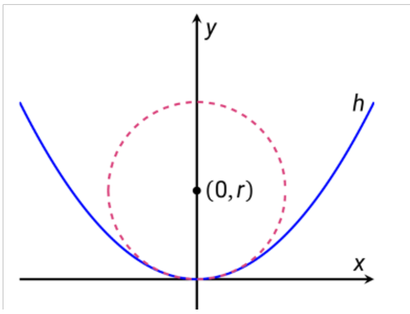


Bestem den eksakte verdien til a som gjer at rektangelet får størst mogleg areal.

Oppgåve 4 (7 poeng)

Funksjonen h er gitt ved

$$h(x) = x^2$$



Ein sirkel med radius r og sentrum $(0, r)$ tangerer grafen til h i punktet $(0, 0)$. Sjå skissa til høgre.

Nedre halvdel av sirkelen er grafen til funksjonen g gitt ved

$$g(x) = r - \sqrt{r^2 - x^2}$$

a) Bestem r slik at $g''(0) = h''(0)$.

Talet r som du fann i oppgåve a), blir kalla *krummingsradiusen* til grafen til h i $(0, h(0))$.

Generelt gjeld denne setninga:

Gå ut frå at ein funksjon f er dobbeltderiverbar i $x = a$, og at $f''(a) \neq 0$. Da er krummingsradiusen $r(a)$ til grafen til f i $(a, f(a))$ gitt ved

$$r(a) = \sqrt{\frac{(1 + (f'(a))^2)^3}{(f''(a))^2}}$$

b) Bruk denne formelen til å rekne ut krummingsradiusen til grafen til h i $(0, h(0))$.

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \ln(x)$$

c) Bruk CAS til å bestemme kva punkt på grafen til f som har minst krummingsradius. Kva er den minste krummingsradiusen?

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler	Del 1: Skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. (På Del 1 er det ikke tillatt å bruke datamaskin.) Del 2: Alle hjelpemidler er tillatt, bortsett fra åpent Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemidler under eksamen, har du ikke lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måter å utveksle informasjon med andre på er ikke tillatt.
Informasjon om oppgaven	Del 1 har 9 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres.
Kilder	Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderingen	Se eksamensveiledningen med kjennetegn på måloppnåelse til sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på Utdanningsdirektoratets nettsider.
Vedlegg	Vedlegg 1: Binomisk og hypergeometrisk fordeling

Del 1

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = x^2 + e^x$

b) $g(x) = x^3 \cdot \sqrt{2x-1}$

c) $h(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

Oppgave 2 (2 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

$$2\ln(a^3b^4) - 3\ln a - 3\ln(ab^2)$$

Oppgave 3 (5 poeng)

a) Vis at $x = 2$ er en løsning av likningen

$$x^3 + 2x^2 = 5x + 6$$

b) Løs ulikheten

$$x^3 + 2x^2 < 5x + 6$$

c) Lag en ulikhet som har løsningsmengden $\langle \leftarrow, -1 \rangle \cup [2, \rightarrow \rangle$

Oppgave 4 (4 poeng)

Posisjonsvektoren til en partikkel er gitt ved vektorfunksjonen

$$\vec{r}(t)=\left[4t+2,\, 2t-5t^2\right]$$

a) Bestem et uttrykk for fartsvektoren og et uttrykk for akselerasjonsvektoren til partikkelen.

b) Når står fartsvektoren vinkelrett på akselerasjonsvektoren?

Oppgave 5 (6 poeng)

Firkanten $ABCD$ er gitt ved $A(1,1)$, $B(6,2)$, $C(5,7)$ og $D(2,8)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $|\overrightarrow{AB}|$.

For en firkant $PQRS$ er det matematiske tyngdepunktet T gitt ved

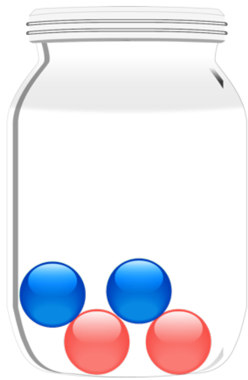
$$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}\right),\text{ der } O \text{ er origo.}$$

b) Bestem koordinatene til det matematiske tyngdepunktet til firkanten $ABCD$ ovenfor.

Vi har gitt punktene $E(0,3)$, $F(2,-2)$ og $G(7,3)$. Disse danner sammen med punktet H en firkant $EFGH$. Det matematiske tyngdepunktet i denne firkanten er $T(3,2)$.

c) Bestem koordinatene til H.

Oppgave 6 (4 poeng)



Tore og Mia diskuterer hvem som skal ta oppvasken. De legger 2 røde og 2 blå kuler i en krukke og skal trekke 2 kuler tilfeldig (uten tilbakelegging) fra krukken. Mia foreslår at hun må ta oppvasken dersom de 2 kulene har lik farge, mens Tore må ta oppvasken dersom de 2 kulene har ulik farge.

a) Bestem sannsynligheten for at Mia må ta oppvasken dersom de følger dette forslaget.

Tore mener at dette er urettferdig. Han foreslår at de skal legge flere røde kuler i krukken.

b) Hvor mange røde kuler må det minst ligge i krukken dersom sannsynligheten for at de to kulene har ulik farge, er mindre enn 50 %?

Oppgave 7 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = (x+2)(x^2+x+5)$$

a) Vis at grafen til f er stigende for alle verdier av x.

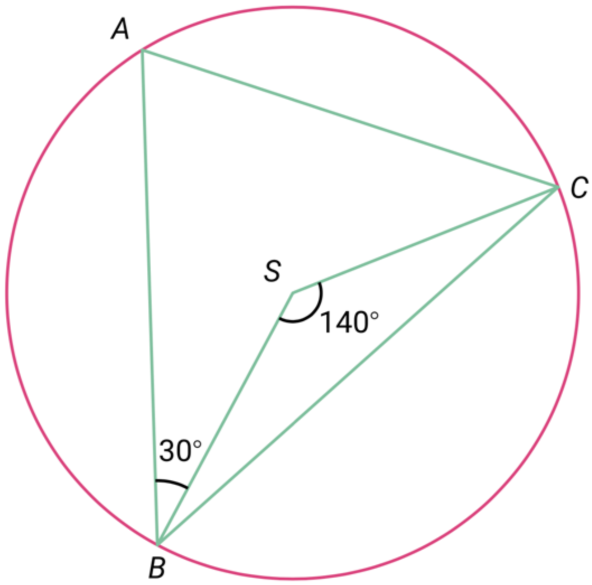
b) Bestem eventuelle vendepunkt på grafen til f.

c) Lag en skisse av grafen til f.

Oppgave 8 (2 poeng)

Punktene A, B og C ligger på en sirkel med sentrum i S, slik skissen til høyre viser.

Bestem vinklene i trekanten ABC.



Oppgave 9 (2 poeng)

I et trapes $ABCD$ lar vi M være midtpunktet på AD og N være midtpunktet på BC. Se skissen.

Vis at $MN = \frac{1}{2}\left(AB + CD\right)$.

Del 2

Oppgave 1 (6 poeng)

Agnete planlegger en 14 dagers ferietur til sørkysten av Gran Canaria. Der er det i gjennomsnitt 300 soldager i året.

Hun har gjort noen beregninger og funnet ut at sannsynligheten for at alle de 14 dagene blir soldager, er 6,4 %.

a) Forklar hvordan hun kan ha kommet fram til dette resultatet. Hvilke forutsetninger ligger til grunn for beregningene?

En familie vurderer å reise på en 14 dagers tur til sørkysten av Gran Canaria hvert år de neste 8 årene.

b) Bestem sannsynligheten for at de opplever bare soldager på minst 2 av disse 8 framtidige feriereisene. Vi forutsetter at antall soldager i året ikke endrer seg i løpet av disse åtte årene.

Ole planlegger en 4 ukers ferietur til et annet sted i verden. Et reisebyrå oppgir at sannsynligheten for minst 22 soldager på dette feriestedet i løpet av en tilfeldig fireukersperiode er minst 90 %.

c) Hvor mange soldager i året må det minst være i gjennomsnitt på dette stedet for at påstanden fra reisebyrået skal være sann?

Oppgave 2 (8 poeng)

Rikard kaster en kule. Etter t sekunder er posisjonen $\vec{r}_A$ til kulen gitt ved

$$\vec{r}_A(t) = [9t\,,\; 1+7t-5t^2]$$

Enheten på aksene er meter, og *x*-aksen er langs bakken.

a) Hvor langt kaster Rikard kulen i *x*-retning?

Berit står 25 meter fra Rikard. Hun kaster en kule i retning mot Rikard samtidig som Rikard kaster sin kule. Etter t sekunder er posisjonen $\vec{r}_B$ til Berits kule gitt ved

$$\vec{r}_B = [25-8t,\; 1+7t-5t^2]$$

b) Tegn grafene til $\vec{r}_A$ og $\vec{r}_B$ i samme koordinatsystem.

c) Vil de to kulene treffe hverandre?

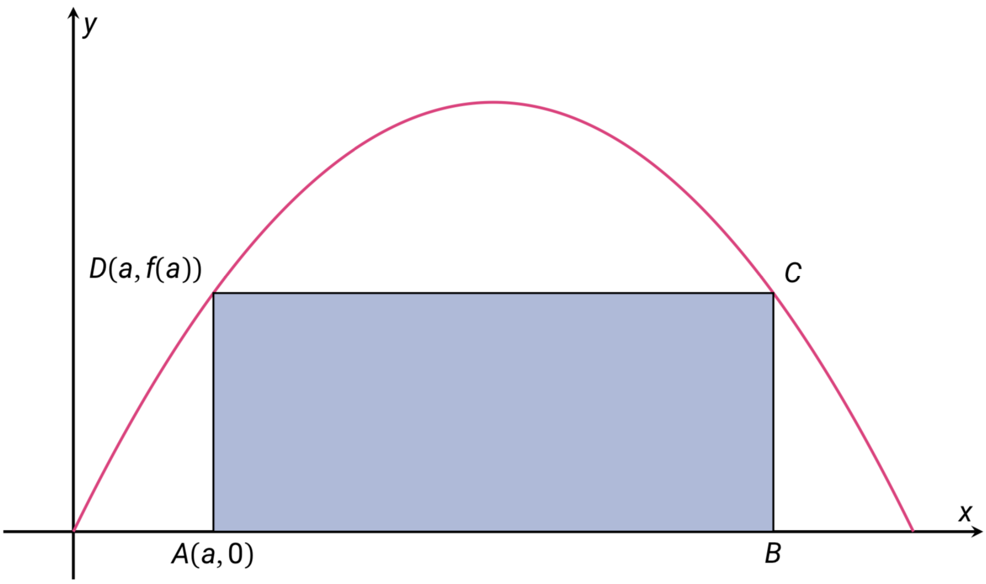
d) Ville svaret i oppgave c) blitt annerledes dersom Berit hadde stått nærmere Rikard da hun kastet kulen? (Vi går ut fra at Berit kaster kulen med samme kraft og retning som når hun står 25 meter fra Rikard.)

Oppgave 3 (3 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 6x - x^2 \quad , \quad x \in [0, 6]$$

Nedenfor har vi tegnet grafen til f sammen med rektangelet $ABCD$.
I rektangelet er $A(a,0)$ og $D(a, f(a))$, der $a \in \langle 0, 3 \rangle$. Punktet C ligger på grafen til f.

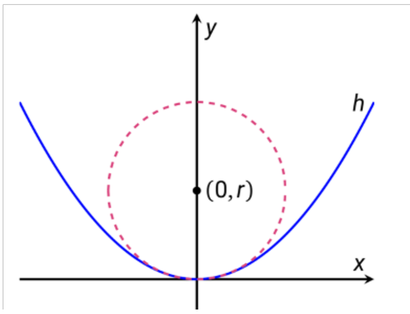


Bestem den eksakte verdien til a som gjør at rektangelet får størst mulig areal.

Oppgave 4 (7 poeng)

Funksjonen h er gitt ved

$$h(x)=x^2$$



En sirkel med radius r og sentrum $(0,r)$ tangerer grafen til h i punktet $(0,0)$. Se skissen til høyre.

Nedre halvdel av sirkelen er grafen til funksjonen g gitt ved

$$g(x)=r-\sqrt{r^2-x^2}$$

a) Bestem r slik at $g''(0)=h''(0)$.

Tallet r som du fant i oppgave a), kalles *krumningsradiusen* til grafen til h i $(0,h(0))$.

Generelt gjelder følgende setning:

Anta at en funksjon f er dobbeltderiverbar i $x=a$, og at $f''(a)\neq 0$. Da er krumningsradiusen $r(a)$ til grafen til f i $(a,f(a))$ gitt ved

$$r(a)=\sqrt{\frac{(1+(f'(a))^2)^3}{(f''(a))^2}}$$

b) Bruk denne formelen til å regne ut krumningsradiusen til grafen til h i $(0,h(0))$.

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\ln(x)$$

c) Bruk CAS til å bestemme hvilket punkt på grafen til f som har minst krumningsradius. Hva er den minste krumningsradiusen?

Vedlegg 1

Binomisk fordeling:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{n-k}$$

Hypergeometrisk fordeling:

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\cdot\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

BLANK SIDE

BLANK SIDE

BLANK SIDE

Utdannings-
direktoratet

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!