Utdanningsdirektoratet

Eksamen

14.11.2023

REA3056 Matematikk R1

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timar. Delen utan og delen med hjelpemiddel skal delast ut samstundes. Delen utan hjelpemiddel skal leverast etter 1 time. Etter 1 time kan du bruke hjelpemiddel. Delen med hjelpemiddel skal leverast innan 5 timar.
Del utan hjelpemiddel	Vanlege skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar.
Del med hjelpemiddel	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte	Delen utan hjelpemiddel har 4 oppgåver. Delen med hjelpemiddel har 6 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Dersom oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, kan ein alternativ metode gi noko utteljing. Bruk av digitale verktøy skal dokumenterast.
Rettleiing om vurderinga	Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke hensiktsmessige hjelpemiddel – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar – vurderer om svar er rimelege
Om vekting av oppgåvene	Alle deloppgåvene blir vekta likt.
Andre opplysningar	Teikningar og grafiske framstillingar: Utdanningsdirektoratet

Del 1

Oppgåve 1

Deriver funksjonen

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x \,.$$

Oppgåve 2

Skriv uttrykka nedanfor i stigande rekkjefølgje.

$$2\ln e^3 \quad , \quad 3\lg 70 \quad , \quad e^{3\ln 2}$$

Hugs å grunngi svaret.

Oppgåve 3

I trekanten ABC er $A(-3,-1)$, $B(2,-2)$ og $C(5,2)$.

a) Avgjer ved hjelp av vektorrekning kva for ei side i trekanten som er kortast.

b) Avgjer ved hjelp av vektorrekning om nokre av vinklane i trekanten er 90°.

Oppgåve 4

Funksjonen *f* er gitt ved

$$f(x) = 2x^2 - 9x - 2\,.$$

Egil ønskjer å lage eit program som reknar ut koordinatane til botnpunktet på grafen til *f*. Han har skrive koden nedanfor.

```python
def f(x):
    return 2*x**2 - 9*x - 2

def df(x,h):
    return (f(x+h) - f(x))/h

h = 0.001
a = 0

while df(a,h) < 0:
    a = a + 1

print("Bunnpunktet er", (a,f(a)) )
```

```
Bunnpunktet er (3, -11)
```

a) Forklar kva for ein strategi Egil har brukt.

Svaret han får, er ikkje riktig.

b) Foreslå ei endring i koden som vil gi Egil eit riktigare svar.

Del 2

Oppgåve 1

Tabellen nedanfor viser konsentrasjonen, i millimol per liter (mmol/L), av eit stoff, *t* sekund etter at ein kjemisk reaksjon starta. Når det har gått lang tid, vil konsentrasjonen av stoffet stabilisere seg på 2,5 mmol/L.

Tid (s)	0	10	20	30	40	50	60
Konsentrasjon (mmol/L)	0	0,28	0,53	0,76	0,95	1,13	1,28
Konsentrasjon −2,5 (mmol/L)	−2,5	−2,22	−1,97	−1,74	−1,55	−1,37	−1,22

a) Bruk blant anna regresjon til å vise at funksjonen *f* gitt ved

$$f(t) = 2{,}5 - 2{,}5 \cdot 0{,}99^t$$

er ein god modell for konsentrasjonen av stoffet *t* sekund etter at reaksjonen starta.

b) Kor lang tid vil det ta før konsentrasjonen er 2,0 mmol/L?

c) Kor lang tid vil det ta før konsentrasjonen aukar med mindre enn 0,001 mmol/L per sekund?

Oppgåve 2

Funksjonen *f* er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + (2+k)x\,, & x < k \\ x^2 + (2-k)x\,, & x \geq k \end{cases}$$

der $k \in \mathbb{R}$.

a) Forklar at *f* er ein kontinuerleg funksjon for alle verdiar av *k*.

b) Bestem *k* slik at *f* blir deriverbar i $x = k$.

c) For kva for nokre verdiar av *k* har *f* ein omvend funksjon?

Oppgåve 3

La *f* vere ein tredjegradsfunksjon.

Avgjer for kvar av påstandane nedanfor om han er sann eller usann. Grunngi svaret.

a) Påstand 1:
Grafen til *f* har minst eitt ekstremalpunkt.

b) Påstand 2:
Alle linjer på forma $y = ax + b$, der $a, b \in \mathbb{R}$, vil skjere grafen til *f*.

c) Påstand 3:
Dersom grafen til *f* har eit vendepunkt for $x = 3$, er $f'(1) = f'(5)$.

Oppgåve 4

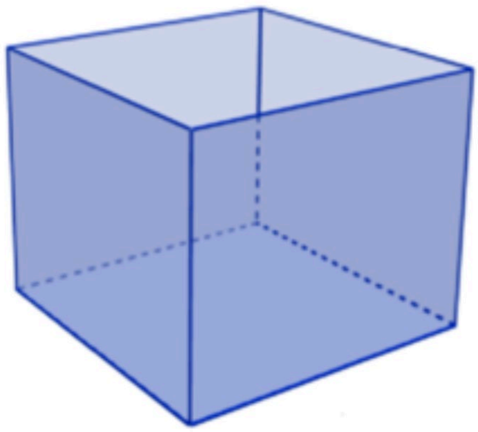
Du skal lage ein kasse utan lokk. Han skal ha form som eit rett prisme. Grunnflata i kassen skal vere kvadratisk. For at vekta ikkje skal bli for stor, kan ikkje det samla arealet av platene som blir brukte til å lage kassen, vere meir enn 120 dm^2.

a) Kva er det største volumet kassen kan få dersom sidene i botnen skal vere 5 dm?

b) Kva er det maksimale volumet kassen kan få?

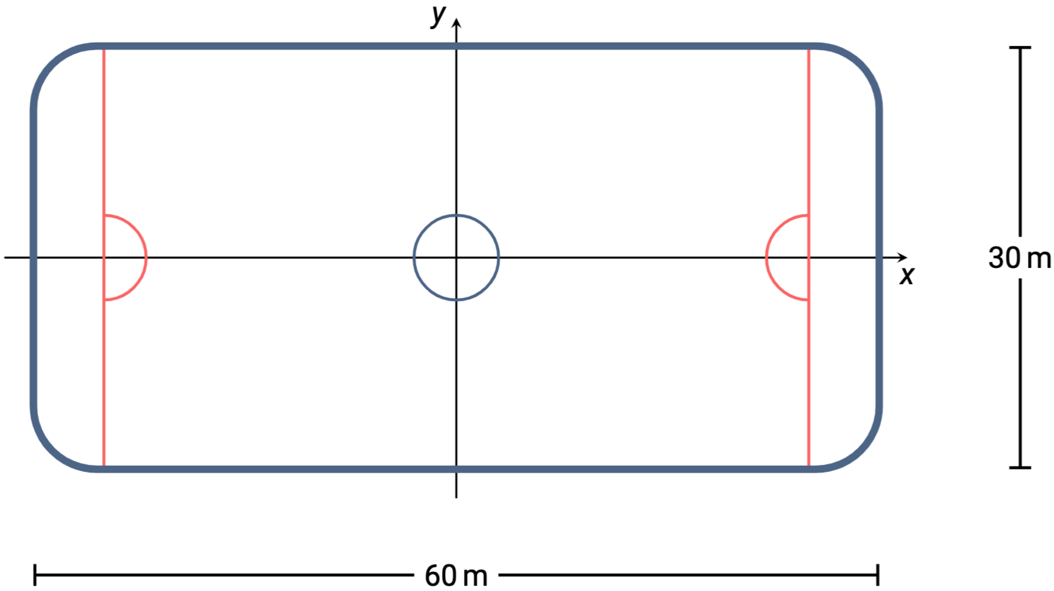
Du skal lage ein slik kasse som rommar 80 dm^3.

c) Kva er det minste samla arealet platene kan ha, dersom du skal lage ein slik kasse?



Oppgåve 5

Ei ishockeybane er 60 m lang og 30 m brei. Vi plasserer eit koordinatsystem slik at origo er midt på bana. Sjå figuren nedanfor.



Ein hockeyspelar sende av garde ein puck. Vektorfunksjonen $\vec{r}$ gitt ved

$$\vec{r}(t) = \left[8(e^{-t} - t), 5(e^{-t} - t)\right]$$

gir posisjonen til pucken t sekund etter at han blei send av garde. Denne vektorfunksjonen gir posisjonen til pucken heilt til han treffer vantet (veggen på bana).

a) Kva for ein fart hadde pucken idet han blei send av garde?

b) Kor lang tid gjekk det før pucken trefte vantet?

Ein annan hockeyspelar var i posisjonen $P(-18, 11)$ då pucken blei send av garde. Spelaren hadde konstant fart $\vec{v} = [3, -7]$.

c) Grunngi at denne spelaren ikkje blei treft av pucken.

Oppgåve 6

I 1823 viste matematikaren Augustin Louis Cauchy følgjande setning:

Anta at ein funksjon f er kontinuerleg i det lukka intervallet $[a,b]$ og deriverbar i det opne intervallet $\langle a,b\rangle$. Då finst ein $c \in \langle a,b\rangle$ slik at

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

La $f(x) = x^2 + 3x + 1$.

a) Bestem c når $a = 1$ og $b = 3$.

b) Lag eit program som bestemmer c, når du gir verdiar til a og b.

c) Bruk programmet til å undersøkje om det finst ein samanheng mellom verdien av c og verdiane av a og b.

Anne påstår at dersom $a = 2$ og $b = 8$, så vil $c = 5$ for alle andregradsfunksjonar.

d) Avgjer om Anne sin påstand er riktig.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer. Delen uten og delen med hjelpemidler skal deles ut samtidig. Delen uten hjelpemidler skal leveres etter 1 time. Etter 1 time kan du bruke hjelpemidler. Delen med hjelpemidler skal leveres innen 5 timer.
Del uten hjelpemidler	Vanlige skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler.
Del med hjelpemidler	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte	Delen uten hjelpemidler har 4 oppgaver. Delen med hjelpemidler har 6 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi noe uttelling. Bruk av digitale verktøy skal dokumenteres.
Veiledning om vurderingen	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger – vurderer om svar er rimelige
Om vekting av oppgavene	Alle deloppgavene vektes likt.
Andre opplysninger	Tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

Del 1

Oppgave 1

Deriver funksjonen

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x \; .$$

Oppgave 2

Skriv uttrykkene nedenfor i stigende rekkefølge.

$$2\ln e^3 \quad , \quad 3\lg 70 \quad , \quad e^{3\ln 2}$$

Husk å begrunne svaret.

Oppgave 3

I trekanten ABC er $A(-3,-1)$, $B(2,-2)$ og $C(5,2)$.

a) Avgjør ved hjelp av vektorregning hvilken side i trekanten som er kortest.

b) Avgjør ved hjelp av vektorregning om noen av vinklene i trekanten er 90°.

Oppgave 4

Funksjonen *f* er gitt ved

$$f(x) = 2x^2 - 9x - 2\,.$$

Egil ønsker å lage et program som regner ut koordinatene til bunnpunktet på grafen til *f*. Han har skrevet koden nedenfor.

```python
def f(x):
    return 2*x**2 - 9*x - 2

def df(x,h):
    return (f(x+h) - f(x))/h

h = 0.001
a = 0

while df(a,h) < 0:
    a = a + 1

print("Bunnpunktet er", (a,f(a)) )
```

```
Bunnpunktet er (3, -11)
```

a) Forklar hvilken strategi Egil har brukt.

Svaret han får, er ikke riktig.

b) Foreslå en endring i koden som vil gi Egil et riktigere svar.

Del 2

Oppgave 1

Tabellen nedenfor viser konsentrasjonen, i millimol per liter (mmol/L), av et stoff, *t* sekunder etter at en kjemisk reaksjon startet. Når det har gått lang tid, vil konsentrasjonen av stoffet stabilisere seg på 2,5 mmol/L.

Tid (s)	0	10	20	30	40	50	60
Konsentrasjon (mmol/L)	0	0,28	0,53	0,76	0,95	1,13	1,28
Konsentrasjon –2,5 (mmol/L)	–2,5	–2,22	–1,97	–1,74	–1,55	–1,37	–1,22

a) Bruk blant annet regresjon til å vise at funksjonen *f* gitt ved

$$f(t) = 2,5 - 2,5 \cdot 0,99^t$$

er en god modell for konsentrasjonen av stoffet *t* sekunder etter at reaksjonen startet.

b) Hvor lang tid vil det ta før konsentrasjonen er 2,0 mmol/L?

c) Hvor lang tid vil det ta før konsentrasjonen øker med mindre enn 0,001 mmol/L per sekund?

Oppgave 2

Funksjonen *f* er gitt ved

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+(2+k)x\,, & x<k\\ x^2+(2-k)x\,, & x\ge k\end{cases}$$

der $k\in\mathbb{R}$.

a) Forklar at *f* er en kontinuerlig funksjon for alle verdier av *k*.

b) Bestem *k* slik at *f* blir deriverbar i $x=k$.

c) For hvilke verdier av *k* har *f* en omvendt funksjon?

Oppgave 3

La *f* være en tredjegradsfunksjon.

Avgjør for hver av påstandene nedenfor om den er sann eller usann. Begrunn svaret.

a) Påstand 1:
Grafen til *f* har minst ett ekstremalpunkt.

b) Påstand 2:
Alle linjer på formen $y=ax+b$, der $a,b\in\mathbb{R}$, vil skjære grafen til *f*.

c) Påstand 3:
Dersom grafen til *f* har et vendepunkt for $x=3$, er $f'(1)=f'(5)$.

Oppgave 4

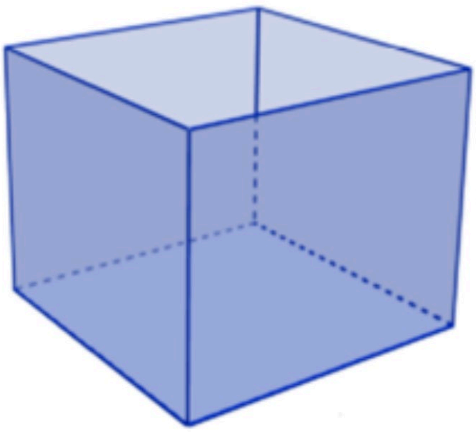
Du skal lage en kasse uten lokk. Den skal ha form som et rett prisme. Grunnflaten i kassen skal være kvadratisk. For at vekten ikke skal bli for stor, kan ikke det samlede arealet av platene som brukes til å lage kassen, være mer enn 120 dm^2.

a) Hva er det største volumet kassen kan få dersom sidene i bunnen skal være 5 dm?

b) Hva er det maksimale volumet kassen kan få?

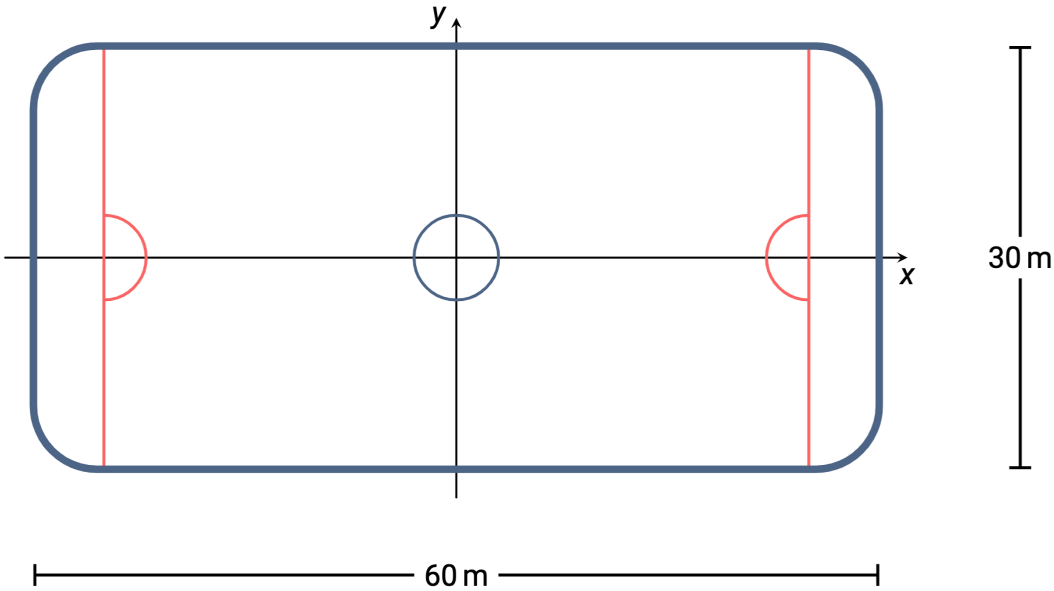
Du skal lage en slik kasse som rommer 80 dm^3.

c) Hva er det minste samlede arealet platene kan ha, dersom du skal lage en slik kasse?



Oppgave 5

En ishockeybane er 60 m lang og 30 m bred. Vi plasserer et koordinatsystem slik at origo er midt på banen. Se figuren nedenfor.



En hockeyspiller sendte av gårde en puck. Vektorfunksjonen $\vec{r}$ gitt ved

$$\vec{r}(t) = \left[8(e^{-t} - t), 5(e^{-t} - t)\right]$$

gir puckens posisjon *t* sekunder etter at den ble sendt av gårde. Denne vektorfunksjonen gir puckens posisjon helt til den treffer vantet (veggen på banen).

a) Hvilken fart hadde pucken idet den ble sendt av gårde?

b) Hvor lang tid gikk det før pucken traff vantet?

En annen hockeyspiller var i posisjonen $P(-18, 11)$ da pucken ble sendt av gårde. Spilleren hadde konstant fart $\vec{v} = [3, -7]$.

c) Begrunn at denne spilleren ikke ble truffet av pucken.

Oppgave 6

I 1823 viste matematikeren Augustin Louis Cauchy følgende setning:

> Anta at en funksjon f er kontinuerlig i det lukkede intervallet $[a,b]$ og deriverbar i det åpne intervallet $\langle a,b \rangle$. Da finnes en $c \in \langle a,b \rangle$ slik at
>
> $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

La $f(x) = x^2 + 3x + 1$.

a) Bestem c når $a = 1$ og $b = 3$.

b) Lag et program som bestemmer c, når du gir verdier til a og b.

c) Bruk programmet til å undersøke om det finnes en sammenheng mellom verdien av c og verdiene av a og b.

Anne påstår at dersom $a = 2$ og $b = 8$, så vil $c = 5$ for alle andregradsfunksjoner.

d) Avgjør om Annes påstand er riktig.

(Blank side)

(Blank side)

Utdannings-
direktoratet

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!