Delprøve 1

OPPGAVE 1

a) Deriver funksjonen

$$f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$$

b) Gitt funksjonen

$$g(x) = x^4 - 4x^3$$

1) Finn eventuelle topp-, bunn- og terrassepunkter på grafen til g.

2) Finn eventuelle vendepunkter på grafen til g. Tegn grafen.

c) Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{x^2 + x}{x^2 - 4} - \frac{2}{4 - 2x}$$

d) Vis at $x = 1$ er en løsning på ligningen $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
Bruk dette til å løse ulikheten $x^3 + 2x^2 - x - 2 \leq 0$

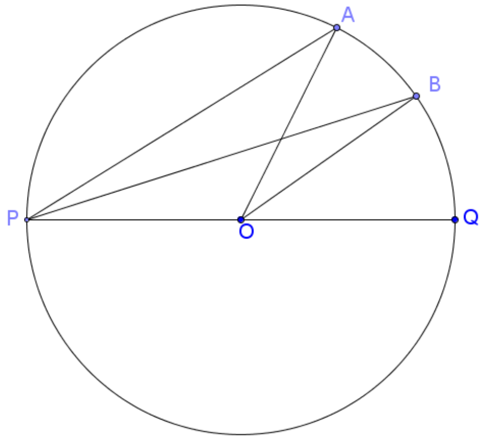
e) Posisjonen til en partikkel er gitt ved vektorfunksjonen

$$\vec{r}(t) = \left[t^2 + 2t \, , \, \frac{1}{2}t^2 \right]$$

1) Finn et uttrykk for farts- og akselerasjonsvektoren.

2) Undersøk om det finnes t-verdier som gjør at fartsvektoren står vinkelrett på akselerasjonsvektoren.

OPPGAVE 2



$\angle APB$, som spenner over buen *AB*, kaller vi en periferivinkel.

$\angle AOB$, som spenner over buen *AB*, kaller vi en sentralvinkel.

a) Tegn inn en annen periferivinkel som spenner over buen *AB*.

En setning i geometrien sier:

> En periferivinkel er alltid halvparten så stor som den sentralvinkelen som spenner over samme bue.

For å bevise denne setningen tegner vi diameteren *PQ*.

b) Forklar at ΔPOA og ΔPOB er likebeinte.

c) Bruk b) til å forklare at

$$\angle BOQ = 2 \cdot \angle BPO$$
$$\angle AOQ = 2 \cdot \angle APO$$

d) Bruk c) til å bevise setningen ovenfor.

EUKLID AV ALEXANDRIA
ca. 325 f.Kr. – ca. 265 f.Kr.

*Euklid av Alexandria er den mest prominente matematikaren fra antikken, og er mest kjent for sin framstilling av matematikken i "*Elementene*". Disse bøkene er blitt brukt som lærebøker i geometri helt fram til 1800-tallet.*

Kilde: www.matematikk.org

Delprøve 2

OPPGAVE 3

På en volleyballtrening er det 23 elever, 9 gutter og 14 jenter. Det skal velges et lag på 6 elever.

a) Hva er sannsynligheten for at det blir like mange gutter som jenter på laget, dersom elevene trekkes ut tilfeldig?

I idrettslaget er det 736 medlemmer, 348 gutter og 388 jenter. Av disse er det 63 gutter og 47 jenter som spiller volleyball.

En person trekkes ut tilfeldig. La A og B være de to hendelsene

A: Personen er en gutt $\qquad$ B: Personen spiller volleyball

b) Forklar med ord hva vi mener med $P(A \cap B)$. Finn denne sannsynligheten.

c) Finn sannsynlighetene $P(B)$ og $P(B|A)$. Er de to hendelsene A og B uavhengige?

En avis ønsker å intervjue to personer i idrettslaget, én som spiller og én som ikke spiller volleyball. De trekker tilfeldig ut én volleyballspiller og én som ikke spiller volleyball.

d) Hva er sannsynligheten for at de to personene er jenter?

OPPGAVE 4

Du skal besvare enten alternativ I eller alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge, vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

En funksjon f er definert ved $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$, $x \neq -1$ og $x \neq 1$

a) Undersøk ved regning om grenseverdiene $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ og $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ eksisterer.

Forklar hvorfor grafen til f bare har én vertikal asymptote. Finn ligningen for den vertikale asymptoten til grafen.

b) Vis ved regning at $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$

Bruk den deriverte til å finne koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til *f.*

c) Bestem $f''(x)$ ved regning. Bruk den andrederiverte til å avgjøre hvor grafen til f vender den hule siden opp og hvor grafen vender den hule siden ned.

d) Tegn grafen til *f.*

Funksjonen g er gitt ved $g(x) = f\left(e^x\right) = \dfrac{e^{3x}+1}{e^{2x}-1}$, $x \neq 0$

e) Finn koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til *g.*

Alternativ II

Alle andregradsfunksjoner kan skrives på formen $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. I denne oppgaven skal vi se på hvordan parameterne a, b, og c endrer grafen til f.

Vi starter med å studere betydningen av parameteren c.

a) Skisser grafene til $f(x) = x^2 + 2x + c$ for c-verdiene $c \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ i samme koordinatsystem. Sammenlign grafene og kommenter.

Så studerer vi betydningen av parameteren a.

b) Skisser grafene til $f(x) = a \cdot x^2 + 2x + 1$ for a-verdiene $a \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ i samme koordinatsystem. Sammenlign grafene og kommenter.

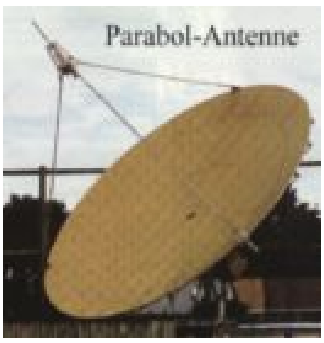
Til slutt studerer vi betydningen av parameteren *b.*

c) Skisser grafene til $f(x) = x^2 + b \cdot x + 1$ for b-verdiene $b \in \{-8, -4, -2, 0, 2, 4, 8\}$ i samme koordinatsystem. Sammenlign grafene og kommenter.

d) Finn koordinatene til bunnpunktet på hver av grafene i c). Hvilken kurve ser det ut til at bunnpunktene ligger på?

e) Finn formelen for den kurven som bunnpunktene ligger på.

f) Gjenta det du gjorde i c), d) og e) for funksjonen $f(x) = -2x^2 + b \cdot x - 8$ for b-verdiene $b \in \{-8, -4, -2, 0, 2, 4, 8\}$. Gi et forslag til hvilken kurve bunn- eller toppunktene til grafen til $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ligger på.



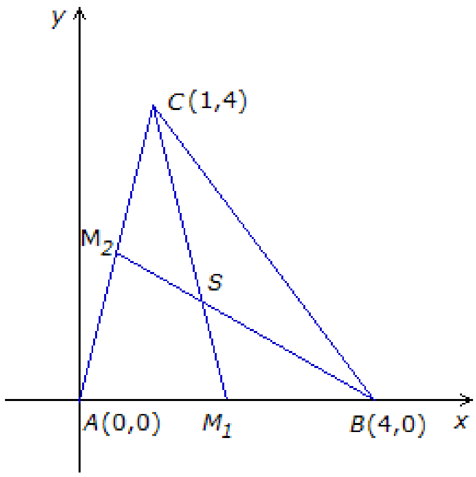
En parabolantenne er en del av den flaten som framkommer ved at en parabel roteres 180° om symmetriaksen.

OPPGAVE 5

En median er et linjestykke som går fra et hjørne i en trekant til midtpunktet på motstående side.

En setning i geometrien sier at de tre medianene i en trekant skjærer hverandre i ett punkt. Denne setningen heter mediansetningen.

En trekant ABC er plassert i et koordinatsystem som vist på figuren. Ved å bruke vektorregning skal vi vise at mediansetningen gjelder for denne trekanten.



a) Skriv opp koordinatene til $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{BC}$.

M_1 er midtpunktet på siden AB, og M_2 er midtpunktet på siden AC.

b) Vis ved regning at koordinatene til punktet M_1 er $(2, 0)$, og punktet M_2 er $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Vi kaller skjæringspunktet mellom CM_1 og BM_2 for S. En metode for å finne koordinatene til S består i å skrive $\overrightarrow{CS}$ på to måter. To ulike veier fra C til S gir

$$\overrightarrow{CS} = k \cdot \overrightarrow{CM_1} \text{ og } \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{CB} + t \cdot \overrightarrow{BM_2}$$

Dette gir oss følgende vektorligning:

$$k \cdot \overrightarrow{CM_1} = \overrightarrow{CB} + t \cdot \overrightarrow{BM_2}$$

c) Sett inn koordinatene til $\overrightarrow{CM_1}$, $\overrightarrow{CB}$ og $\overrightarrow{BM_2}$, og vis at vektorligningen kan skrives som

$$[k, -4k] = \left[3 - \frac{7t}{2}, -4 + 2t\right]$$

d) Løs vektorligningen i c).

e) Bestem $\overrightarrow{CS}$ og koordinatene til punktet S.

f) Vis at den tredje medianen går gjennom punktet S.