DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Formlene for arealet A av en sirkel og volumet V av en kule med radius r er gitt ved

$$A(r) = \pi r^2 \text{ og } V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Bestem $A'(r)$ og $V'(r)$.

Oppgave 2 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $g(x) = 3\ln(x^2 - 1)$

b) $h(x) = \dfrac{2x^2}{e^x}$

Oppgave 3 (5 poeng)

Polynomfunksjonen P er gitt ved

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

a) Vis at $P(1) = 0$

b) Bruk blant annet polynomdivisjon til å faktorisere $P(x)$ i førstegradsfaktorer.

c) Løs ulikheten $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leq 0$

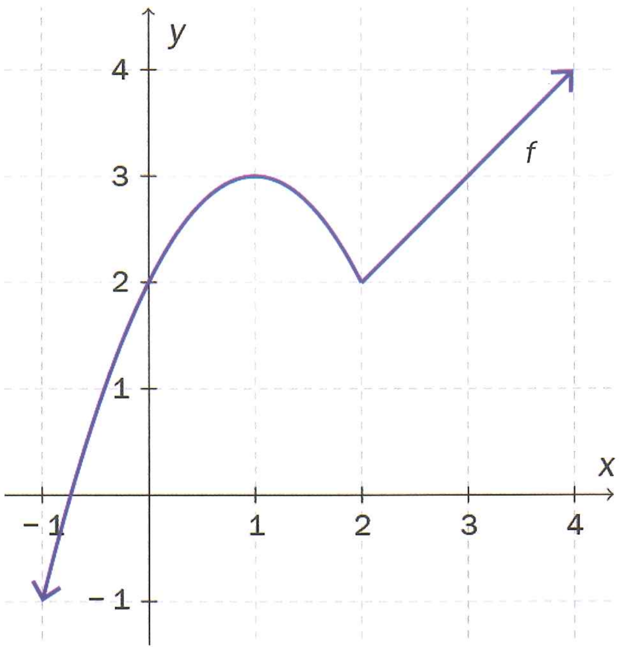
Oppgave 4 (2 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

$$\ln(a^2 \cdot b) - 2\ln a - \ln\left(\frac{1}{b}\right)$$

Oppgave 5 (2 poeng)

Figuren nedenfor viser grafen til en funksjon f der $D_f = \langle -1, 4 \rangle$



Avgjør for hvilke x-verdier f er kontinuerlig, og for hvilke x-verdier f er deriverbar.

Oppgave 6 (3 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 2$$

Vis at grafen til f har en vendetangent i punktet $(-2, f(-2))$ med likning $y = -12x - 10$

Oppgave 7 (3 poeng)

Vektorene $\vec{a} = [2, 3]$, $\vec{b} = [-6, 4]$ og $\vec{c} = [3, 11]$ er gitt.

a) Undersøk om $\vec{a} \perp \vec{b}$

b) Bestem ved regning to tall k og t slik at $\vec{c} = k\vec{a} + t\vec{b}$

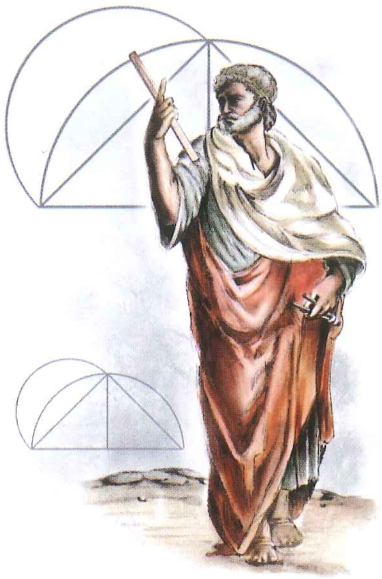
Oppgave 8 (4 poeng)

Hippokrates fra Khios (ca. 470–410 f.Kr.) var trolig den første greske matematikeren som skrev en lærebok i geometri, 100 år før Euklid.

Grekerne forsøkte å konstruere et kvadrat som hadde like stort areal som en sirkel (*sirkelens kvadratur*).

Hippokrates-månen (i blå farge nedenfor) var en del av dette forsøket.

Kilde: Proclus, *Kommentar til Euklid I*

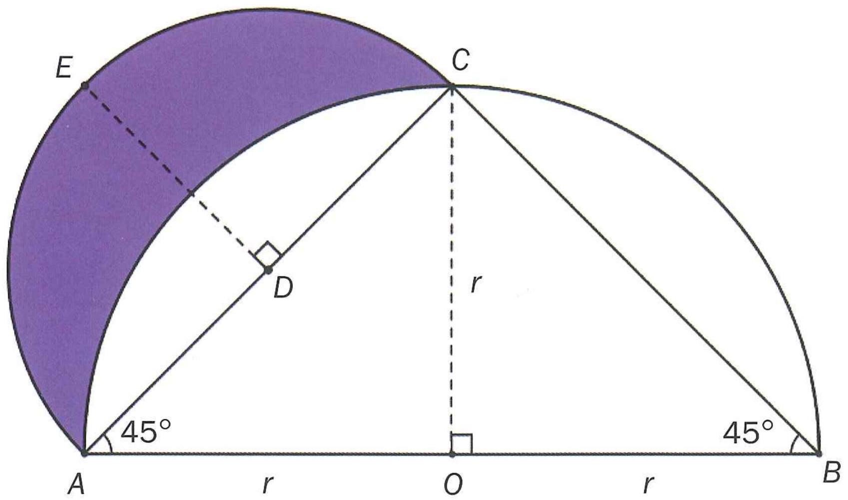


På figuren nedenfor er ACB en halvsirkel med sentrum i O, og AEC er en halvsirkel med sentrum i D. $\angle CAB = \angle ABC = 45°$

a) Konstruer figuren nedenfor når du setter $r = 5{,}0$ cm. Ta med konstruksjonsforklaring.

b) På figuren nedenfor har Hippokrates-månen blå farge.

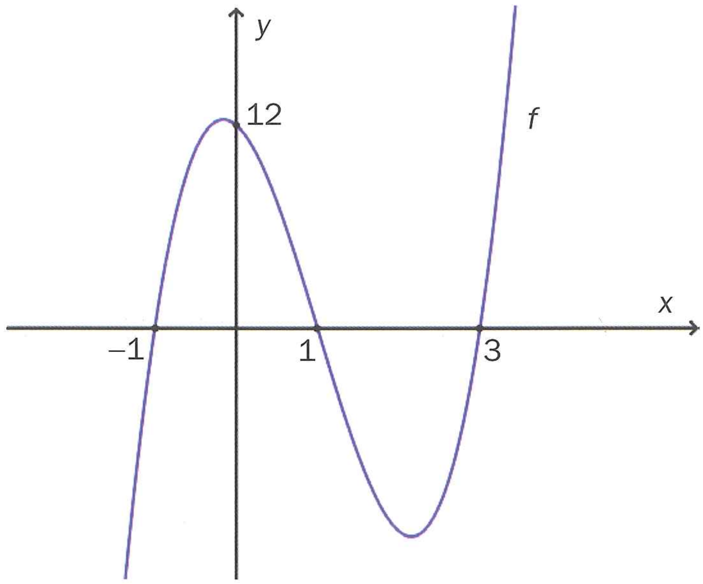
Vis ved regning at arealet av *Hippokrates-månen* er lik arealet av $\triangle AOC$ når radien i halvsirkelen ACB er r.



DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (7 poeng)

Figuren nedenfor viser grafen til en tredjegradsfunksjon f.



a) Forklar at $f(x)$ er delelig med $(x-1)$, $(x+1)$ og $(x-3)$.

Begrunn at vi da kan skrive

$$f(x) = a(x^2-1)(x-3) \quad , \text{ der } a \text{ er en konstant.}$$

Bestem a når punktet $(0, 12)$ ligger på grafen til f.

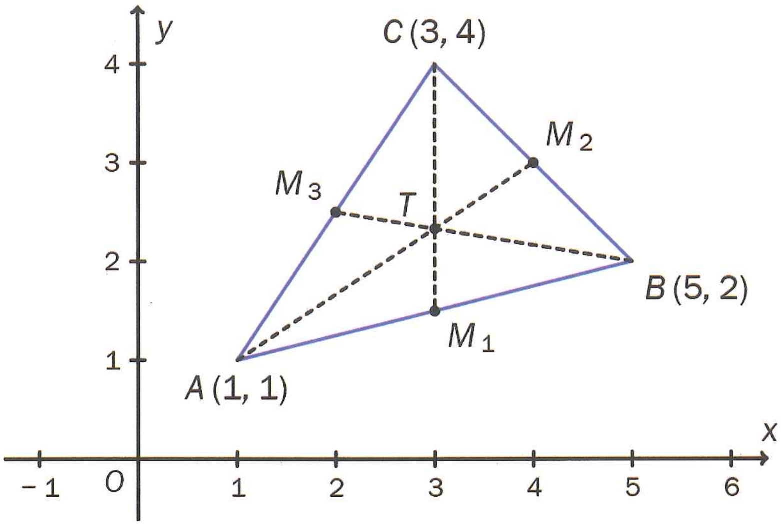
b) Bestem likningen til tangenten i punktet $(0, 12)$.

c) Denne tangenten skjærer grafen til f i et annet punkt.

Bestem ved regning koordinatene til dette punktet.

Oppgave 2 (6 poeng)

Se skissen nedenfor.



a) Midtpunktene på sidekantene i $\triangle ABC$ er M_1, M_2 og M_3.

Vis ved regning at M_1 har koordinatene $\left(3, \frac{3}{2}\right)$. Bestem koordinatene til M_2 og M_3 ved regning.

b) Bestem en parameterframstilling til linjen gjennom A og M_2 og en parameterframstilling til linjen gjennom C og M_1.

c) Tyngdepunktet T i trekanten er skjæringspunktet mellom medianene.
Bestem koordinatene til T.

Oppgave 3 (7 poeng)

En partikkel har posisjonsvektoren

$$\vec{r}(t) = \left[\ln t,\, t^2 - 4t\right], \qquad t > 0$$

a) Tegn grafen til $\vec{r}$ og bestem skjæringspunktene med koordinataksene ved regning.

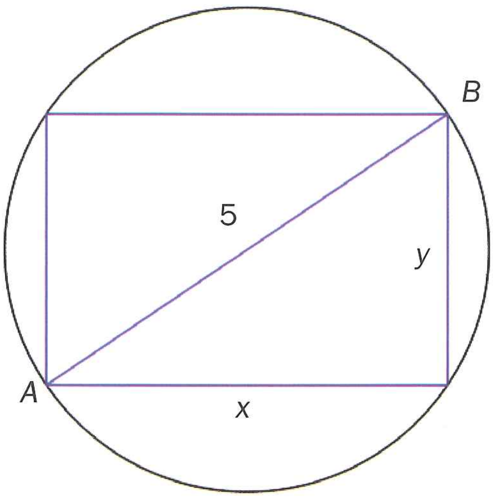
b) Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og bruk denne til å bestemme eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til $\vec{r}$. Tegn inn $\vec{v}(1)$ på grafen.

c) Vis at akselerasjonsvektoren er $\vec{a}(t) = \left[-\frac{1}{t^2},\, 2\right]$. Bestem $\vec{a}(t)$ når $t \to \infty$.

Kommenter svaret.

Oppgave 4 (8 poeng)

Et rektangel med sider x og y er innskrevet i en sirkel med diameter $AB = 5$.



a) Vis at arealet T av rektangelet er gitt ved

$$T(x) = x \cdot \sqrt{25 - x^2}$$

Forklar hvilke verdier x kan ha.

b) Bestem x og y når arealet er størst mulig.
Kommenter svaret.

c) Vis at omkretsen til rektangelet er gitt ved

$$O(x) = 2 \cdot \sqrt{25 - x^2} + 2x$$

Bruk $O'(x)$ og bestem x når omkretsen er størst mulig.
Kommenter svaret.

Oppgave 5 (6 poeng)

Vi har røde og svarte kuler i en eske. Vi skal trekke tilfeldig to kuler uten tilbakelegging. Vi definerer følgende hendelser:

> A: Vi trekker to kuler med ulik farge.
>
> B: Vi trekker to kuler med samme farge.

Anta at vi har 6 røde og 4 svarte kuler i esken.

a) Bestem $P(A)$

b) Bestem $P(B)$

Anta at vi har 6 røde og et ukjent antall svarte kuler i esken, og at hendelsene A og B skal ha lik sannsynlighet.

c) Hvor mange svarte kuler kan det være i esken?

Oppgave 6 (2 poeng)

Løs likningen

$$n^2 \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{\lg x} = x^2 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$