Utdanningsdirektoratet

Eksamen

20.05.2019

REA3022 Matematikk R1

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 8 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast.
Vedlegg:	Vedlegg 1: Binomisk og hypergeometrisk fordeling
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du — viser rekneferdigheiter og matematisk forståing — gjennomfører logiske resonnement — ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar — kan bruke formålstenlege hjelpemiddel — forklarer framgangsmåtar og grunngir svar — skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar — vurderer om svar er rimelege
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv.: — Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (5 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - \sqrt{x}$

b) $g(x) = x^2 \cdot \ln(2x - 1)$

c) $h(x) = \dfrac{4x}{e^{2x}}$

Oppgåve 2 (4 poeng)

Skriv så enkelt som mogleg

a) $\dfrac{1}{x^2 - x} + \dfrac{1}{x^2 + x} - \dfrac{1}{x^2 - 1}$

b) $\dfrac{\left(\ln e^3 + 1\right)^2}{\left(e^{\ln 3} + 1\right)^3}$

Oppgåve 3 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$$

a) Vis at divisjonen $f(x) : (2x - 1)$ går opp.

b) Faktoriser $f(x)$ i lineære faktorar.

c) Løys ulikskapen

$$f(x) \geq (2x - 1)(x + 2)$$

Oppgåve 4 (6 poeng)

Vi har gitt punkta $A(1, 3)$ og $B(5, -1)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $|\overrightarrow{AB}|$.

b) Bestem ei likning for sirkelen som har AB som diameter.

Eit punkt C ligg på linja $x = 6$.

c) Avgjer om det er mogleg å plassere C slik at trekanten ABC får ein rett vinkel i C.

Oppgåve 5 (4 poeng)

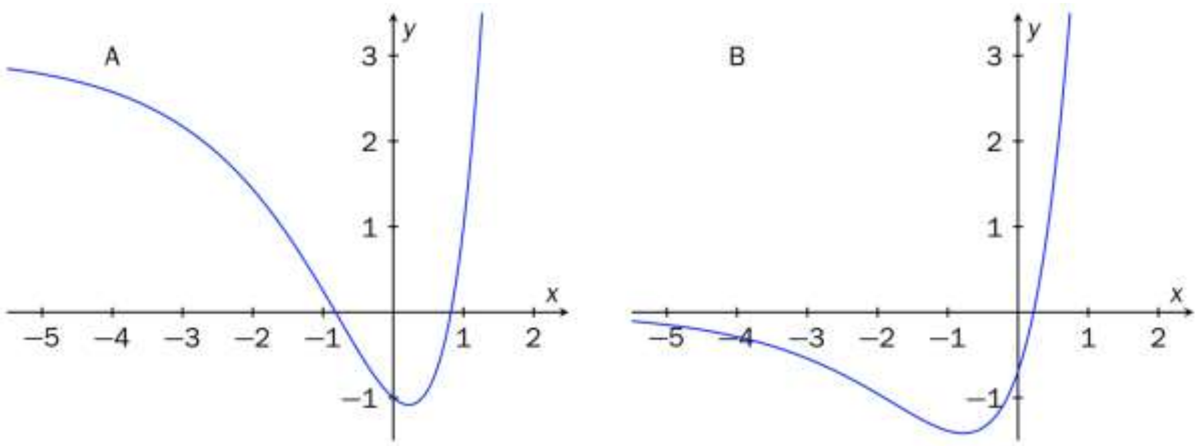
I TV-programmet «Mesternes mester» er det ti deltakarar. Det er fem kvinner og fem menn. Deltakarane konkurrerer mot kvarandre og blir slått ut éin etter éin. Til slutt er det tre deltakarar igjen. Desse tre er i finalen.

a) Kor mange ulike grupper på tre deltakarar kan komme til finalen?

b) Kor mange av gruppene du fann i oppgåve a), inneheld fleire kvinner enn menn?

Oppgåve 6 (4 poeng)

Nedanfor ser du to grafar. Den eine grafen tilhøyrer funksjonen f, medan den andre tilhøyrer funksjonen f'.

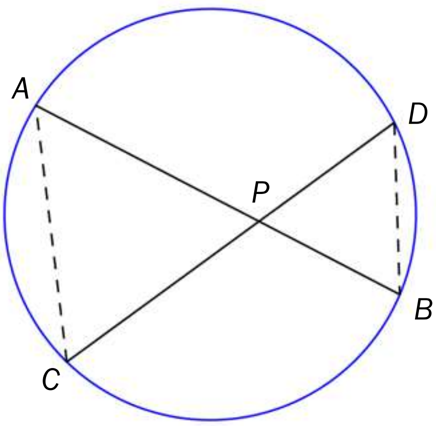


a) Avgjer kva for ein av dei to grafane som tilhøyrer f. Gjer greie for korleis du kom fram til svaret.

b) Lag ei skisse av forteiknlinja til f''.

Oppgåve 7 (4 poeng)

I figuren nedanfor har vi ein sirkel med to kordar: AB og CD. Kordane skjer kvarandre i punktet P.



a) Grunngi at $\triangle APC$ og $\triangle BPD$ er formlike.

b) Vis at $AP \cdot PB = CP \cdot PD$

Oppgåve 8 (3 poeng)

Ein funksjon f er deriverbar og dobbelderiverbar for alle x.

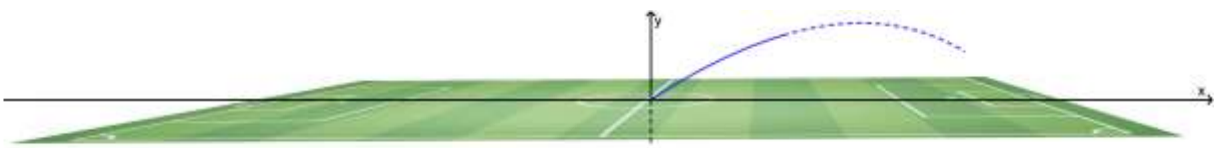
Nedanfor er det gitt nokre utsegner. Skriv av utsegnene. I boksen mellom utsegnene skal du setje inn eit av symbola $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ eller $\Leftrightarrow$. Hugs å grunngi svara.

a) $f'(2) = 0$ $\boxed{}$ Grafen til f har eit toppunkt i $(2, f(2))$

b) $f'(3) = 0$ og $f''(3) > 0$ $\boxed{}$ Grafen til f har eit botnpunkt i $(3, f(3))$

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (6 poeng)



Ein fotballspelar tok eit frispark. Han sparka ballen i retning av målet til motstandarane. Posisjonen til ballen t sekund etter at frisparket blei teke, er gitt ved vektorfunksjonen

$$\vec{r}(t) = \left[28t - 3t^2,\ 10t - 5t^2\right]$$

Eininga langs aksane er meter.

a) Bestem banefarten som ballen fekk da han blei sparka.

b) Kor lang tid tok det frå ballen blei sparka, til han trefte bakken?

c) Bestem banefarten til ballen da han var i sitt høgaste punkt.

Oppgåve 2 (5 poeng)

På ein arbeidsplass er det tolv kvinner og åtte menn. Kvar månad arrangerer dei eit lotteri. Det går ut på at alle legg éin lapp med namnet sitt i ei eske. Dei trekkjer så ut tre tilfeldige lappar frå eska. Lappane blir ikkje lagde tilbake mellom kvar gong dei trekkjer. Dei tre som blir trekte ut, vinn ein kinobillett kvar.

a) Vis at sannsynet er $p \approx 0{,}2947$ for at nøyaktig to av dei tre vinnarane er menn.

I løpet av eit år arrangerer dei tolv slike lotteri.

b) Bestem sannsynet for at nøyaktig to av vinnarane er menn i seks av dei tolv lotteria.

c) Bestem sannsynet for at dei tre vinnarane har same kjønn i minst eitt av dei tolv lotteria.

Oppgåve 3 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 2$$

a) Bruk grafteiknar til å teikne grafen til f.

b) Bestem eksakte verdiar for koordinatane til eventuelle toppunkt, botnpunkt og vendepunkt på grafen til f.

Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = x^3 + a \cdot x^2 + 4x + 2 \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

c) Bruk CAS til å avgjere for kva verdiar av a grafen til g har både eit toppunkt og eit botnpunkt.

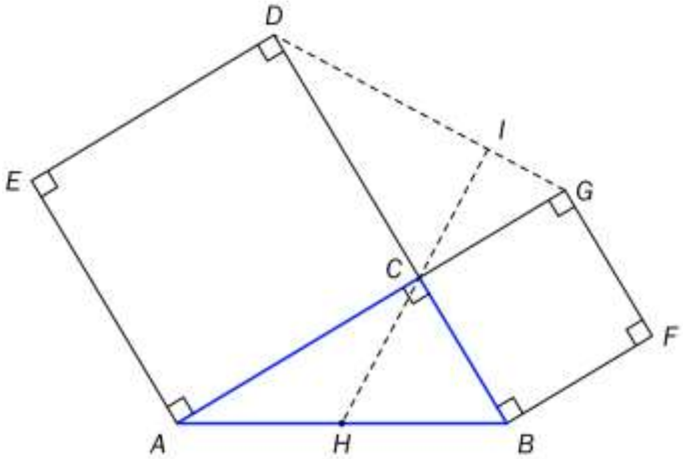
Funksjonen h er gitt ved

$$h(x) = -2x^3 + 4x + 2$$

d) Bruk CAS til å vise at vendepunktet på grafen til g ligg på grafen til h for alle verdiar av a.

Oppgåve 4 (5 poeng)

I ein rettvinkla trekant ABC er $\angle ACB = 90°$. La H vere midtpunktet på AB. La vidare $CBFG$ og $ACDE$ vere kvadrat på dei to katetane. Punktet I er skjeringspunktet mellom forlenginga av linjestykket HC og linjestykket DG. Sjå figuren nedanfor.



a) Grunngi at $\triangle ABC \cong \triangle GDC$ (kongruente trekantar).

b) Grunngi at $\triangle AHC$ er likebeint.

c) Vis at $\angle CIG = 90°$.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 8 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres.
Vedlegg:	Vedlegg 1: Binomisk og hypergeometrisk fordeling
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du — viser regneferdigheter og matematisk forståelse — gjennomfører logiske resonnementer — ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner — kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler — forklarer framgangsmåter og begrunner svar — skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger — vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv.: — Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - \sqrt{x}$

b) $g(x) = x^2 \cdot \ln(2x - 1)$

c) $h(x) = \dfrac{4x}{e^{2x}}$

Oppgave 2 (4 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

a) $\dfrac{1}{x^2 - x} + \dfrac{1}{x^2 + x} - \dfrac{1}{x^2 - 1}$

b) $\dfrac{\left(\ln e^3 + 1\right)^2}{\left(e^{\ln 3} + 1\right)^3}$

Oppgave 3 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$$

a) Vis at divisjonen $f(x) : (2x - 1)$ går opp.

b) Faktoriser $f(x)$ i lineære faktorer.

c) Løs ulikheten

$$f(x) \geq (2x - 1)(x + 2)$$

Oppgave 4 (6 poeng)

Vi har gitt punktene $A(1,\ 3)$ og $B(5,\ -1)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $|\overrightarrow{AB}|$.

b) Bestem en likning for sirkelen som har AB som diameter.

Et punkt C ligger på linjen $x = 6$.

c) Avgjør om det er mulig å plassere C slik at trekanten ABC får en rett vinkel i C.

Oppgave 5 (4 poeng)

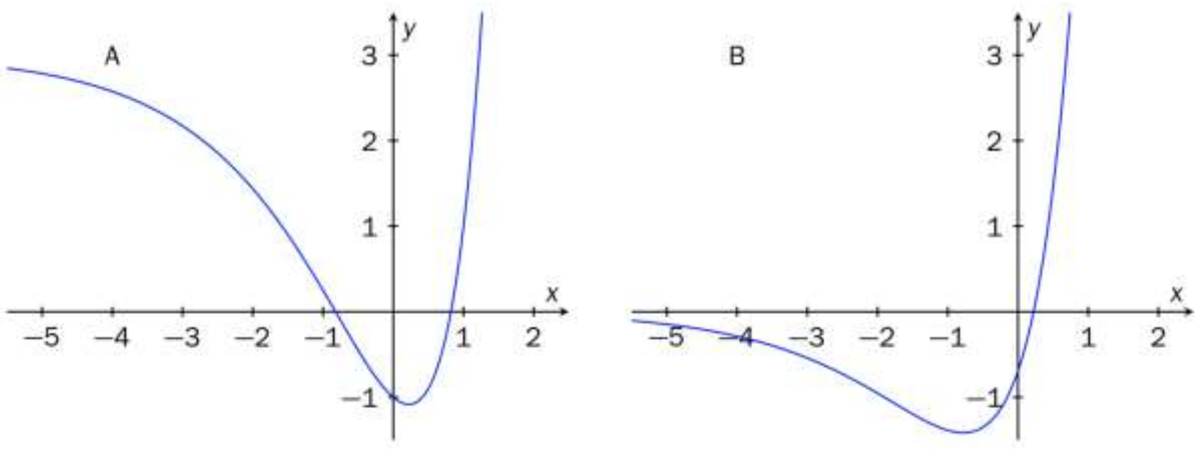
I TV-programmet «Mesternes mester» er det 10 deltakere. Det er 5 kvinner og 5 menn. Deltakerne konkurrerer mot hverandre og blir slått ut én etter én. Til slutt er det tre deltakere igjen. Disse tre er i finalen.

a) Hvor mange ulike grupper på tre deltakere kan komme til finalen?

b) Hvor mange av gruppene du fant i oppgave a), inneholder flere kvinner enn menn?

Oppgave 6 (4 poeng)

Nedenfor ser du to grafer. Den ene grafen tilhører funksjonen f, mens den andre tilhører funksjonen f'.

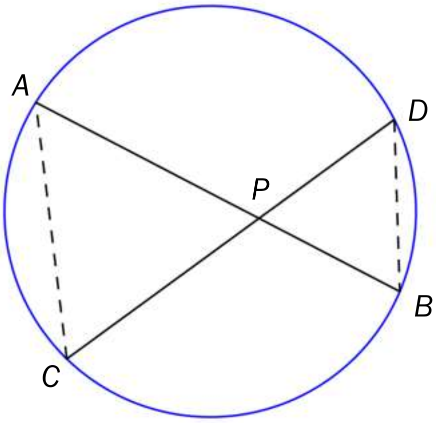


a) Avgjør hvilken av de to grafene som tilhører f. Gjør rede for hvordan du kom fram til svaret.

b) Lag en skisse av fortegnslinjen til f''.

Oppgave 7 (4 poeng)

I figuren nedenfor har vi en sirkel med to korder: AB og CD. Kordene skjærer hverandre i punktet P.



a) Begrunn at $\triangle APC$ og $\triangle BPD$ er formlike,

b) Vis at $AP \cdot PB = CP \cdot PD$

Oppgave 8 (3 poeng)

En funksjon f er deriverbar og dobbelderiverbar for alle x.

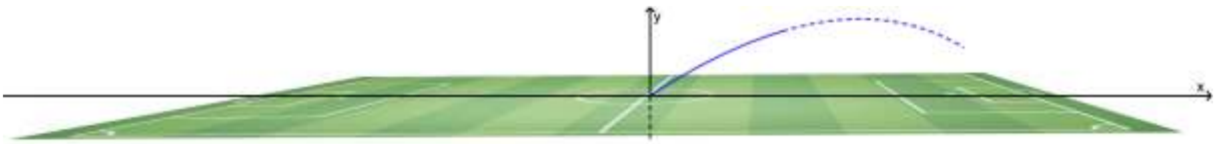
Nedenfor er det gitt noen utsagn. Skriv av utsagnene. I boksen mellom utsagnene skal du sette inn et av symbolene $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ eller $\Leftrightarrow$. Husk å begrunne svarene.

a) $f'(2) = 0$ $\boxed{}$ Grafen til f har et toppunkt i $(2, f(2))$

b) $f'(3) = 0$ og $f''(3) > 0$ $\boxed{}$ Grafen til f har et bunnpunkt i $(3, f(3))$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)



En fotballspiller tok et frispark. Han sparket ballen i retning av motstandernes mål. Ballens posisjon t sekunder etter at frisparket ble tatt, er gitt ved vektorfunksjonen

$$\vec{r}(t) = \left[28t - 3t^2,\ 10t - 5t^2\right]$$

Enheten langs aksene er meter.

a) Bestem banefarten som ballen fikk da den ble sparket.

b) Hvor lang tid tok det fra ballen ble sparket, til den traff bakken?

c) Bestem ballens banefart da den var i sitt høyeste punkt.

Oppgave 2 (5 poeng)

På en arbeidsplass er det tolv kvinner og åtte menn. Hver måned arrangerer de et lotteri. Det går ut på at alle legger én lapp med navnet sitt i en eske. De trekker så ut tre tilfeldige lapper fra esken. Lappene legges ikke tilbake mellom hver gang de trekker. De tre som blir trukket ut, vinner en kinobillett hver.

a) Vis at sannsynligheten er $p \approx 0{,}2947$ for at nøyaktig to av de tre vinnerne er menn.

I løpet av et år arrangerer de tolv slike lotterier.

b) Bestem sannsynligheten for at nøyaktig to av vinnerne er menn i seks av de tolv lotteriene.

c) Bestem sannsynligheten for at de tre vinnerne har samme kjønn i minst ett av de tolv lotteriene.

Oppgave 3 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 2$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f.

b) Bestem eksakte verdier for koordinatene til eventuelle toppunkt, bunnpunkt og vendepunkt på grafen til f.

Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = x^3 + a \cdot x^2 + 4x + 2 \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

c) Bruk CAS til å avgjøre for hvilke verdier av a grafen til g har både et toppunkt og et bunnpunkt.

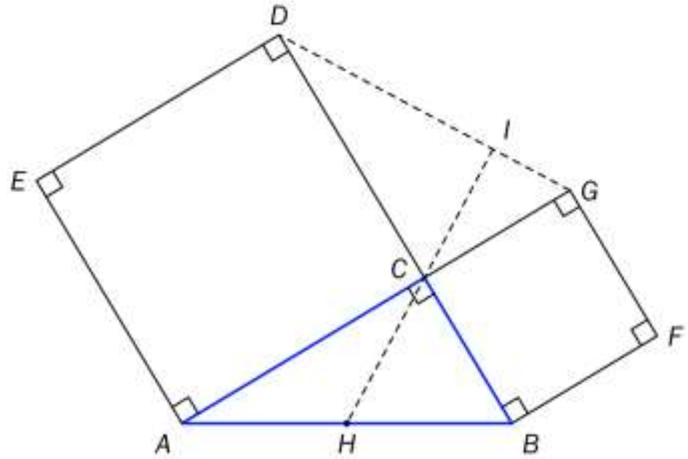
Funksjonen h er gitt ved

$$h(x) = -2x^3 + 4x + 2$$

d) Bruk CAS til å vise at vendepunktet på grafen til g ligger på grafen til h for alle verdier av a.

Oppgave 4 (5 poeng)

I en rettvinklet trekant ABC er $\angle ACB = 90°$. La H være midtpunktet på AB. La videre $CBFG$ og $ACDE$ være kvadrater på de to katetene. Punktet I er skjæringspunktet mellom forlengelsen av linjestykket HC og linjestykket DG. Se figuren nedenfor.



a) Begrunn at $\triangle ABC \cong \triangle GDC$ (kongruente trekanter).

b) Begrunn at $\triangle AHC$ er likebeint.

c) Vis at $\angle CIG = 90°$.

Vedlegg 1

Binomisk fordeling:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Hypergeometrisk fordeling:

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k} \cdot \binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Blank side.

Blank side.

Blank side

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet