Utdanningsdirektoratet

# Eksamen

19.05.2020

REA3022 Matematikk R1

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Sensitivity: Internal

# Nynorsk

| Eksamensinformasjon | |
|---|---|
| **Eksamenstid** | Eksamen varer i 5 timar. |
| **Hjelpemiddel** | Del 1: Skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar (På del 1 er det ikkje tillate å bruke datamaskin.)<br><br>Del 2: Alle hjelpemiddel er tillatne, bortsett frå opent Internett og andre verktøy som kan brukast til kommunikasjon.<br><br>Når du bruker nettbaserte hjelpemiddel under eksamen, har du ikkje lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måtar å utveksle informasjon med andre på er ikkje tillate. |
| **Informasjon om oppgåva** | Del 1 har 8 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver.<br><br>Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing.<br>Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga.<br><br>Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast. |
| **Kjelder** | Kjelder for bilete, teikningar osv.:<br>— https://www.abcnyheter.no/motor/bil/2019/01/14/195491699/antallet-elbiler-i-norge-har-eksplodert (lest: 14.11.19)<br>— Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet |
| **Informasjon om vurderinga** | Sjå eksamensrettleiinga med kjenneteikn på måloppnåing til sentralt gitt skriftleg eksamen. Eksamensrettleiinga finn du på Utdanningsdirektoratets nettsider. |
| **Vedlegg** | Vedlegg 1: Binomisk og hypergeometrisk fordeling |

# Del 1

## Oppgåve 1 (5 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = x^6 + 3x^5 + \ln x$

b) $g(x) = 2x^2 \cdot e^{2x-1}$

c) $h(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$

## Oppgåve 2 (4 poeng)

Løys likningane

a) $\ln(x^2) + \ln x = 12$

b) $e^{2x} - e^x = 6$

## Oppgåve 3 (4 poeng)

Om vektorane $\vec{u}$ og $\vec{v}$ får du vite at

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$
- $|\vec{u}| = 3$ og $|\vec{v}| = 2$

Vektorane $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er gitt ved

$$\vec{a} = 2\vec{u} + 3\vec{v} \quad \text{og} \quad \vec{b} = t \cdot \vec{u} + 5\vec{v}$$

a) Bestem $t$ slik at $\vec{a}$ blir parallell med $\vec{b}$.

b) Bestem $t$ slik at $\vec{a} \perp \vec{b}$.

## **Oppgåve 4** (7 poeng)

Polynomet $P$ er gitt ved

$$P(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$$

a) Forklar korleis vi kan vite at divisjonen $P(x):(x-1)$ går opp, utan å måtte utføre sjølve divisjonen.

b) Bruk mellom anna polynomdivisjon til å vise at $P(x) = (x-1)(2x+1)(3x-1)$.

Funksjonen $F$ er gitt ved

$$F(x) = \frac{P(x)}{x^2 - 1}$$

c) Løys ulikskapen $F(x) \geq 0$.

d) Bestem grenseverdiane, dersom dei eksisterer

$$\lim_{x \to 1} F(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x \to -1} F(x)$$

## **Oppgåve 5** (5 poeng)

Per har alle skolebøkene sine liggjande heime. Han har éi bok i kvart av dei $8$ faga han tar. Kvar dag har Per undervisning i 3 fag. Han må derfor leggje $3$ bøker i sekken før han går til skolen.

a) Kor mange moglege kombinasjonar av bøker kan han leggje i sekken?

Ein dag er Per skikkeleg trøytt. Han hugsar ikkje kva fag han skal ha den dagen. Han tar derfor med seg $4$ av bøkene utan å sjå kva bøker det er.

b) Kva er sannsynet for at han har med seg riktig bok til alle faga den dagen?

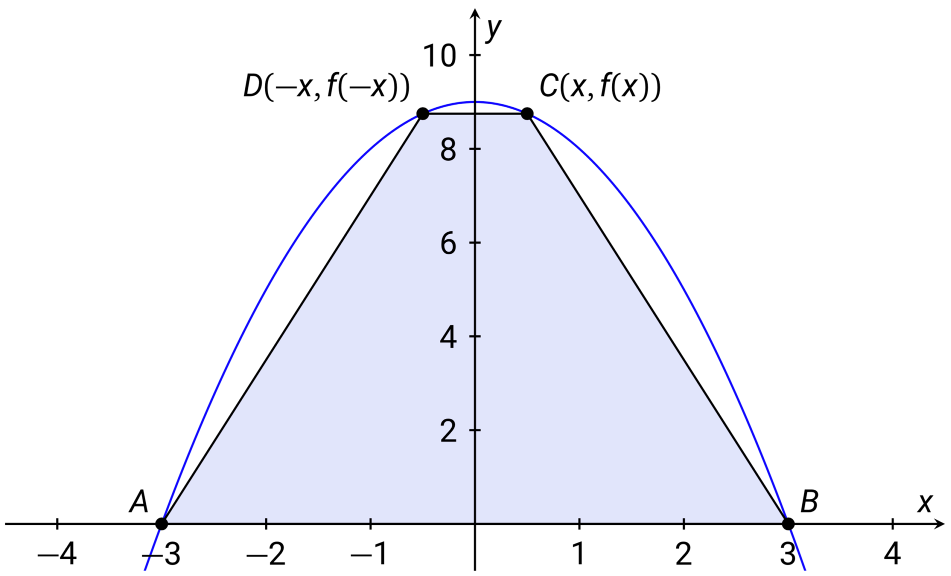
c) Kva er sannsynet for at han har med seg riktig bok til minst 2 av faga den dagen?

## **Oppgåve 6** (4 poeng)

I koordinatsystemet under har vi teikna grafen til funksjonen $f$ gitt ved

$$f(x) = 9 - x^2$$

Punkta $A(-3,0)$, $B(3,0)$, $C(x, f(x))$ og $D(-x, f(-x))$ dannar eit trapes når $0 < x < 3$.



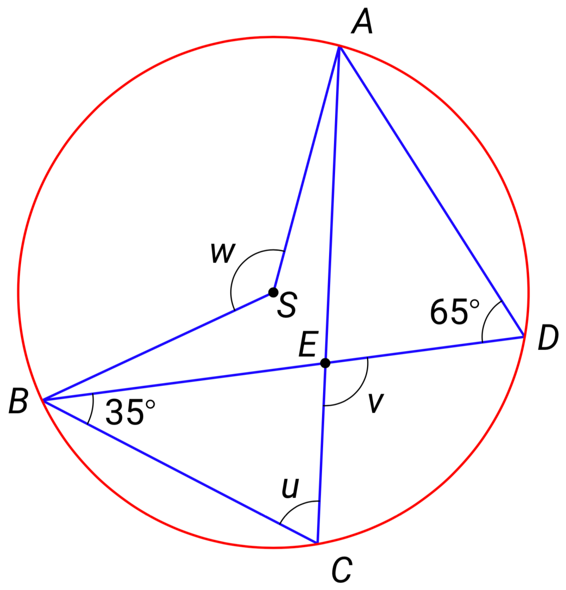

a) Vis at arealet $F$ av trapeset $ABCD$ er gitt ved

$$F(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 27\,, \qquad 0 < x < 3$$

b) Bestem det største arealet trapeset kan ha.

## **Oppgåve 7** (3 poeng)

Skissa under viser ein sirkel med sentrum $S$. Punkta $A$, $B$, $C$ og $D$ ligg på sirkelperiferien.




Bestem vinklane $u$, $v$ og $w$.

## **Oppgåve 8** (4 poeng)

Punkta $A(-1,1)$ og $C(7,5)$ er hjørne i ein firkant $ABCD$. Alle sidene i firkanten er like lange. Punktet $D$ ligg på linja $\ell$ gitt ved $y = 2x + 1$.

a) Forklar at $\overrightarrow{AD}$ kan skrivast på forma $\overrightarrow{AD} = [t+1, 2t]$, for ein $t \in \mathbb{R}$.

b) Bestem koordinatane til punkta $B$ og $D$ ved rekning.

# Del 2

## Oppgåve 1 (6 poeng)

Maria frå Bergen i Hordaland las teksten nedanfor på nettsida abcnyheter.no.

> På fylkesnivå er det Hordaland som leder an med en elbilandel på 12,5 prosent av personbilparken. Oslo følger hakk i hæl med 12,1 prosent og Akershus på tredjeplass med 11,5 prosent elbilandel.

Ein dag bestemmer ho seg for å føre statistikk over dei 100 første bilane som køyrer forbi Danmarks plass i Bergen.

a) Kva for antakingar må vi gjere for å kunne sjå på dette som eit binomisk forsøk?

b) Bestem sannsynet for at minst 15 av bilane er elbilar.

Ein annan dag vil ho igjen føre statistikk over bilar som køyrer forbi Danmarks plass.

c) Kor mange bilar må ho minst føre statistikk over for at sannsynet skal vere større enn 90 % for at minst 20 av bilane er elbilar?

## Oppgåve 2 (4 poeng)

Funksjonen $p$ er gitt ved

$$p(x) = x^2 + 3x - 1$$

a) Vis at linja som går gjennom $(-1, p(-1))$ og $(3, p(3))$, er parallell med tangenten til grafen til $p$ i punktet $(1, 3)$.

Funksjonen $q$ er gitt ved

$$q(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

b) Bruk CAS til å vise at $q'(x) = \dfrac{q(x+h) - q(x-h)}{2h}$ for alle $x$, der $h \neq 0$.

## **Oppgåve 3** (8 poeng)

Posisjonane $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ (målt i meter) til to partiklar ved eit tidspunkt $t$ (målt i sekund) er gitt ved

$$\vec{r}_1(t)=[t^2-2, t^3-2t], \quad -2\leq t\leq 2$$
$$\vec{r}_2(t)=[2t-1, 4t-4t^2], \quad -2\leq t\leq 2$$

a) Teikn grafane til $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ i same koordinatsystem.

b) Bestem banefarten til kvar av partiklane når $t=-1$.

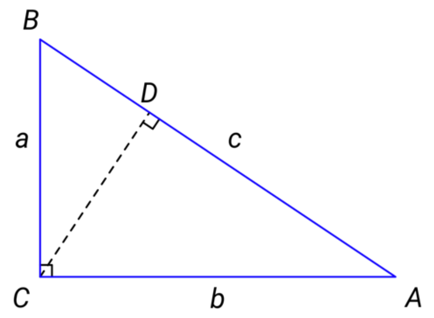
c) Ved kva tidspunkt har dei to partiklane same fartsretning?

d) Kva er den minste avstanden mellom partiklane i løpet av dei fire sekunda?

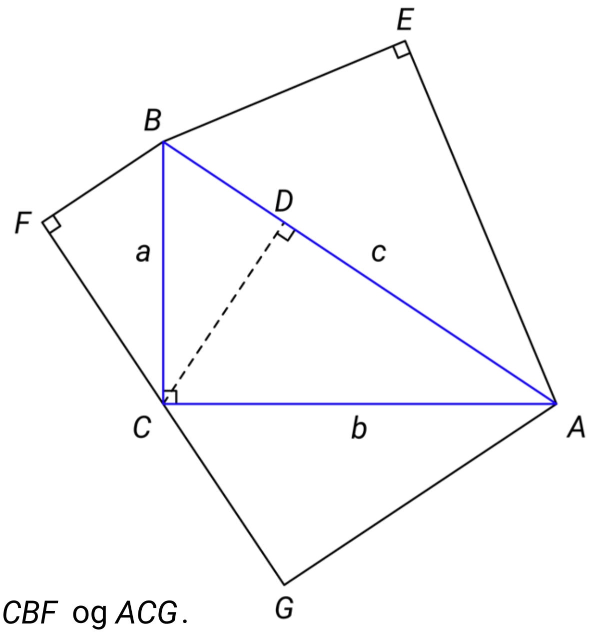
## Oppgåve 4 (6 poeng)

I denne oppgåva skal du bevise Pytagoras’ setning.

Den rettvinkla trekanten $ABC$ har sidene $a$, $b$ og $c$.
La $D$ vere fotpunktet til normalen frå $C$ på $AB$.




- Vi speglar $\triangle ABC$ om $AB$ og får $\triangle AEB$.
- Vi speglar $\triangle BCD$ om $BC$ og får $\triangle CBF$.
- Vi speglar $\triangle CAD$ om $AC$ og får $\triangle ACG$.



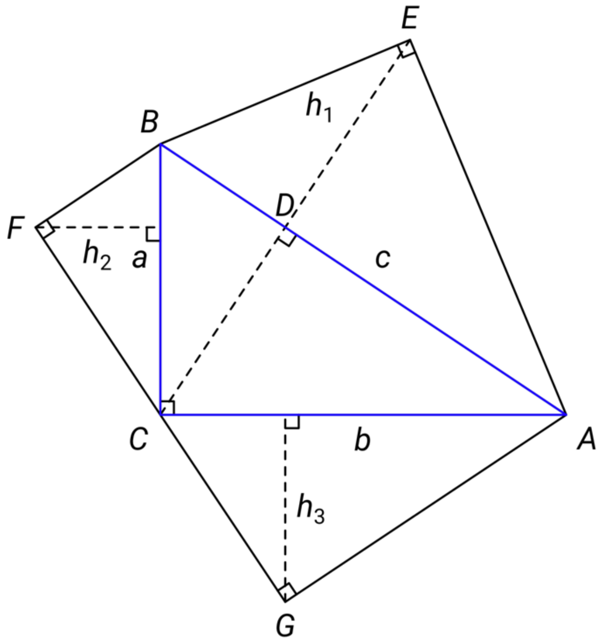

a) Grunngi at trekantane $AEB$, $CBF$ og $ACG$ er formlike med kvarandre.

Vi lar $h_1$, $h_2$ og $h_3$ vere høgdene i trekantane $AEB$, $CBF$ og $ACG$.

Vi set $k = \dfrac{h_1}{c}$.

b) Grunngi at $h_2 = k \cdot a$ og $h_3 = k \cdot b$.

c) Bruk arealbetraktningar og resultatet frå oppgåve b) til å bevise Pytagoras’ setning.



# Bokmål

| Eksamensinformasjon | |
|---|---|
| **Eksamenstid** | Eksamen varer i 5 timer. |
| **Hjelpemidler** | Del 1: Skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. (På del 1 er det ikke tillatt å bruke datamaskin.)<br><br>Del 2: Alle hjelpemidler er tillatt, bortsett fra åpent Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon.<br><br>Når du bruker nettbaserte hjelpemidler under eksamen, har du ikke lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måter å utveksle informasjon med andre på er ikke tillatt. |
| **Informasjon om oppgaven** | Del 1 har 8 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver.<br><br>Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.<br>Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen.<br><br>Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres. |
| **Kilder** | Kilder for bilder, tegninger osv.:<br>— https://www.abcnyheter.no/motor/bil/2019/01/14/195491699/antallet-elbiler-i-norge-har-eksplodert (lest: 14.11.19)<br>— Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet |
| **Informasjon om vurderingen** | Se eksamensveiledningen med kjennetegn på måloppnåelse til sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på Utdanningsdirektoratets nettsider. |
| **Vedlegg** | Vedlegg 1: Binomisk og hypergeometrisk fordeling |

# Del 1

## Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = x^6 + 3x^5 + \ln x$

b) $g(x) = 2x^2 \cdot e^{2x-1}$

c) $h(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$

## Oppgave 2 (4 poeng)

Løs likningene

a) $\ln(x^2) + \ln x = 12$

b) $e^{2x} - e^x = 6$

## Oppgave 3 (4 poeng)

Om vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ får du vite at

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$
- $|\vec{u}| = 3$ og $|\vec{v}| = 2$

Vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er gitt ved

$$\vec{a} = 2\vec{u} + 3\vec{v} \quad \text{og} \quad \vec{b} = t \cdot \vec{u} + 5\vec{v}$$

a) Bestem $t$ slik at $\vec{a}$ blir parallell med $\vec{b}$.

b) Bestem $t$ slik at $\vec{a} \perp \vec{b}$.

## Oppgave 4 (7 poeng)

Polynomet $P$ er gitt ved

$$P(x)=6x^3-5x^2-2x+1$$

a) Forklar hvordan vi kan vite at divisjonen $P(x):(x-1)$ går opp, uten å måtte utføre selve divisjonen.

b) Bruk blant annet polynomdivisjon til å vise at $P(x)=(x-1)(2x+1)(3x-1)$.

Funksjonen $F$ er gitt ved

$$F(x)=\frac{P(x)}{x^2-1}$$

c) Løs ulikheten $F(x)\geq 0$.

d) Bestem grenseverdiene, dersom de eksisterer

$$\lim_{x\to 1} F(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x\to -1} F(x)$$

## Oppgave 5 (5 poeng)

Per har alle skolebøkene sine liggende hjemme. Han har én bok i hvert av de $8$ fagene han tar. Hver dag har Per undervisning i 3 fag. Han må derfor legge $3$ bøker i sekken før han går til skolen.

a) Hvor mange mulige kombinasjoner av bøker kan han legge i sekken?

En dag er Per skikkelig trøtt. Han husker ikke hvilke fag han skal ha den dagen. Han tar derfor med seg $4$ av bøkene uten å se hvilke det er.

b) Hva er sannsynligheten for at han har med seg riktig bok til alle fagene den dagen?

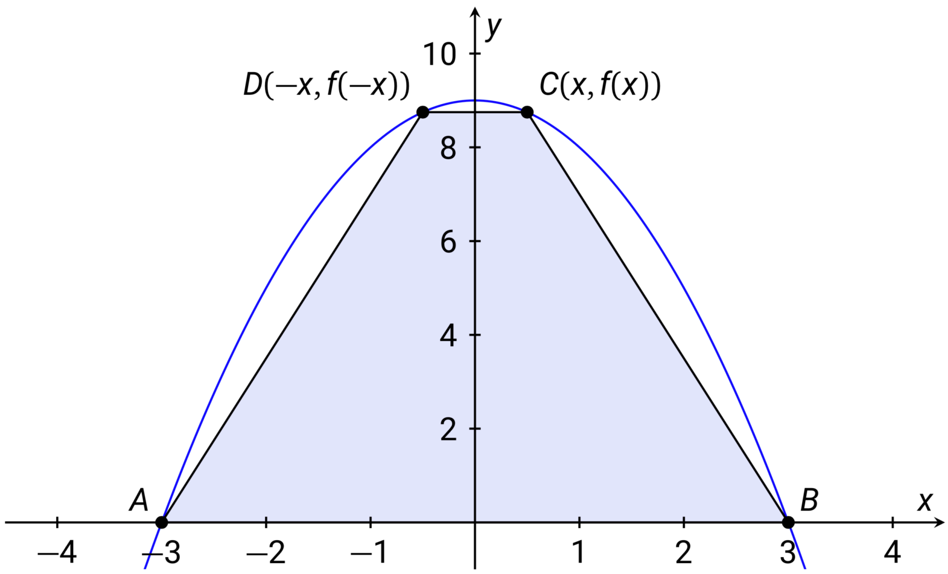
c) Hva er sannsynligheten for at han har med seg riktig bok til minst 2 av fagene den dagen?

## Oppgave 6 (4 poeng)

I koordinatsystemet nedenfor har vi tegnet grafen til funksjonen $f$ gitt ved

$$f(x) = 9 - x^2$$

Punktene $A(-3,0)$, $B(3,0)$, $C(x, f(x))$ og $D(-x, f(-x))$ danner et trapes når $0 < x < 3$.



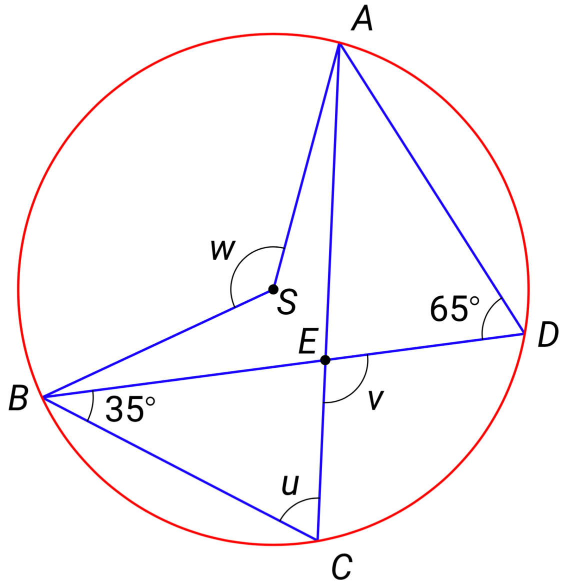

a) Vis at arealet $F$ av trapeset $ABCD$ er gitt ved

$$F(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 27 \,, \qquad 0 < x < 3$$

b) Bestem det største arealet trapeset kan ha.

## **Oppgave 7** (3 poeng)

Skissen nedenfor viser en sirkel med sentrum $S$. Punktene $A$, $B$, $C$ og $D$ ligger på sirkelperiferien.




Bestem vinklene $u$, $v$ og $w$.

## **Oppgave 8** (4 poeng)

Punktene $A(-1,1)$ og $C(7,5)$ er hjørner i en firkant $ABCD$. Alle sidene i firkanten er like lange. Punktet $D$ ligger på linjen $\ell$ gitt ved $y = 2x + 1$.

a) Forklar at $\overrightarrow{AD}$ kan skrives på formen $\overrightarrow{AD} = [t+1, 2t]$, for en $t \in \mathbb{R}$.

b) Bestem koordinatene til punktene $B$ og $D$ ved regning.

# Del 2

## Oppgave 1 (6 poeng)

Maria fra Bergen i Hordaland leste teksten nedenfor på nettsiden abcnyheter.no.

> På fylkesnivå er det Hordaland som leder an med en elbilandel på 12,5 prosent av personbilparken. Oslo følger hakk i hæl med 12,1 prosent og Akershus på tredjeplass med 11,5 prosent elbilandel.

En dag bestemmer hun seg for å føre statistikk over de 100 første bilene som kjører forbi Danmarks plass i Bergen.

a) Hvilke antakelser må vi gjøre for å kunne se på dette som et binomisk forsøk?

b) Bestem sannsynligheten for at minst 15 av bilene er elbiler.

En annen dag vil hun igjen føre statistikk over biler som kjører forbi Danmarks plass.

c) Hva er det minste antallet biler hun må føre statistikk over for at sannsynligheten skal være større enn 90 % for at minst 20 av bilene er elbiler?

## Oppgave 2 (4 poeng)

Funksjonen $p$ er gitt ved

$$p(x) = x^2 + 3x - 1$$

a) Vis at linjen som går gjennom $(-1, p(-1))$ og $(3, p(3))$, er parallell med tangenten til grafen til $p$ i punktet $(1, 3)$.

Funksjonen $q$ er gitt ved

$$q(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

b) Bruk CAS til å vise at $q'(x) = \dfrac{q(x+h) - q(x-h)}{2h}$ for alle $x$, der $h \neq 0$.

## Oppgave 3 (8 poeng)

Posisjonene $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ (målt i meter) til to partikler ved et tidspunkt $t$ (målt i sekund) er gitt ved

$$\vec{r}_1(t) = [t^2 - 2, t^3 - 2t], \quad -2 \le t \le 2$$
$$\vec{r}_2(t) = [2t - 1, 4t - 4t^2], \quad -2 \le t \le 2$$

a) Tegn grafene til $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ i samme koordinatsystem.

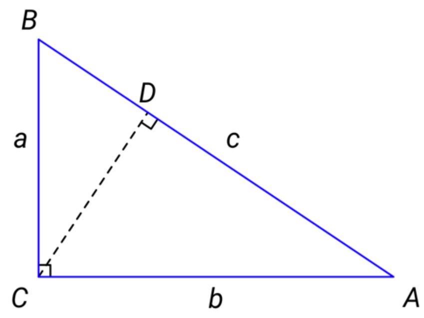
b) Bestem banefarten til hver av partiklene når $t = -1$.

c) Ved hvilke tidspunkt har de to partiklene samme fartsretning?

d) Hva er den minste avstanden mellom partiklene i løpet av de fire sekundene?

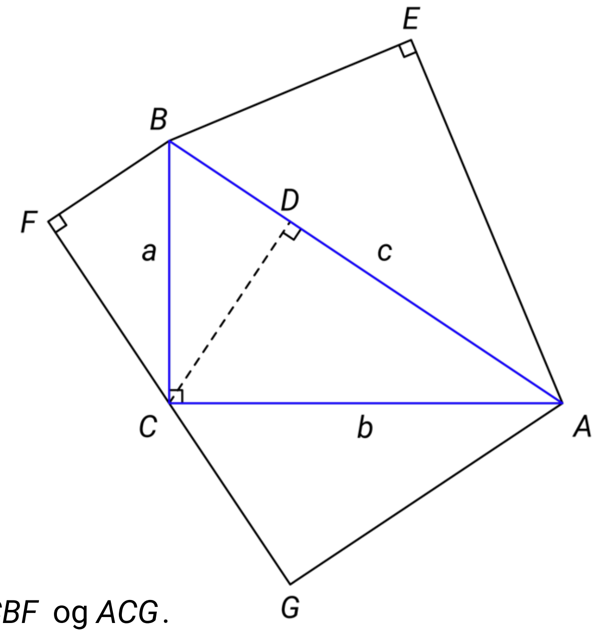
## **Oppgave 4** (6 poeng)

I denne oppgaven skal du bevise Pytagoras' setning.




Den rettvinklede trekanten $ABC$ har sidene $a$, $b$ og $c$.
La $D$ være fotpunktet til normalen fra $C$ på $AB$.

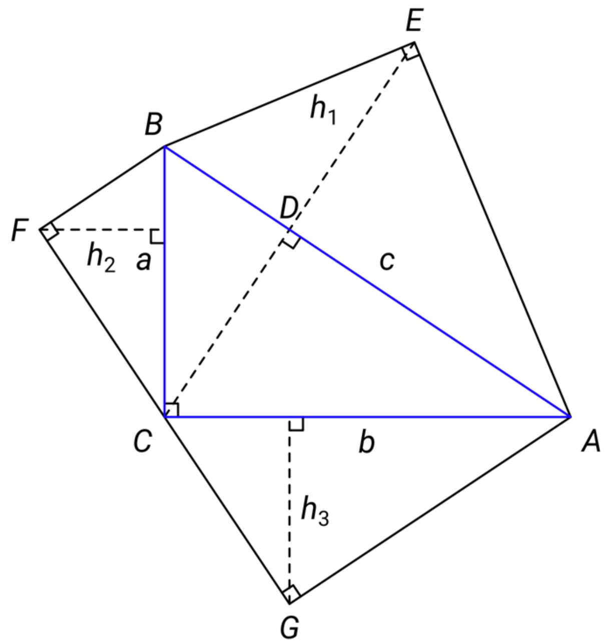
- Vi speiler $\triangle ABC$ om $AB$ og får $\triangle AEB$.
- Vi speiler $\triangle BCD$ om $BC$ og får $\triangle CBF$.
- Vi speiler $\triangle CAD$ om $AC$ og får $\triangle ACG$.




a) Begrunn at trekantene $AEB$, $CBF$ og $ACG$ er formlike med hverandre.

Vi lar $h_1$, $h_2$ og $h_3$ være høydene i trekantene $AEB$, $CBF$ og $ACG$.

Vi setter $k = \frac{h_1}{c}$.




b) Begrunn at $h_2 = k \cdot a$ og $h_3 = k \cdot b$.

c) Bruk arealbetraktninger og resultatet fra oppgave b) til å bevise Pytagoras' setning.

Blank side

## Vedlegg 1

Binomisk fordeling:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{n-k}$$

Hypergeometrisk fordeling:

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\cdot\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Utdannings-
direktoratet

## TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

**Lykke til!**

## TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

**Lykke til!**