

# Eksamen

19.05.2021

REA3022 Matematikk R1



Se eksamenstips på baksiden!

# Nynorsk

<b>Eksamensinformasjon</b>	
<b>Eksamenstid</b>	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar
<b>Hjelpemiddel</b>	Del 1: Skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar (På del 1 er det ikkje tillate å bruke datamaskin.)  Del 2: Etter tre timar er alle hjelpemiddel tillatne, bortsett frå opent Internett og andre verktøy som kan brukast til kommunikasjon.  Når du bruker nettbaserte hjelpemiddel under eksamen, har du ikkje lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måtar å utveksle informasjon med andre på er ikkje tillatne.
<b>Informasjon om oppgåva</b>	Del 1 har 9 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver.  Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga.  Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast.
<b>Kjelder</b>	Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet
<b>Informasjon om vurderinga</b>	Sjå eksamensrettleiinga med kjenneteikn på måloppnåing til sentralt gitt skriftleg eksamen. Eksamensrettleiinga finn du på Utdanningsdirektoratets nettsider.
<b>Vedlegg</b>	Vedlegg 1: Binomisk og hypergeometrisk fordeling

## Del 1

### Oppgave 1 (6 poeng)

Deriver funksjonane

a)  $f(x) = 3x^3 - 4x + \frac{1}{x}$

b)  $g(x) = 3x^2 \cdot \ln x$

c)  $h(x) = \sqrt{4x^2 - 5}$

### Oppgave 2 (4 poeng)

Skriv så enkelt som mogleg

a)  $\frac{3x}{x^2 - x - 2} - \frac{2x}{x + 1} - \frac{2}{x - 2}$

b)  $\ln(a \cdot b^2) - 8 \ln b + 2 \ln a^3 - 3 \ln \left( \frac{a^2}{b^2} \right)$

### Oppgave 3 (4 poeng)

Vi har gitt vektorane  $\vec{a} = [4, 1]$ ,  $\vec{b} = [-1, 3]$  og  $\vec{c} = [4, 14]$ .

a) Undersøk om  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

b) Bestem to tal  $r$  og  $s$  slik  $\vec{c} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ .

### Oppgave 4 (4 poeng)

Ein fabrikk har to maskiner, A og B, som produserer deksel til mobiltelefonar. Maskin A står for 40 prosent av produksjonen, mens maskin B står for 60 prosent av produksjonen.

Det viser seg at det er feil på 20 prosent av deksla som er produserte av maskin A, og 10 prosent av deksla som er produserte av maskin B.

Tenk deg at du skal trekkje eit tilfeldig deksel som er produsert av fabrikk.

a) Kva er sannsynet for at det er feil på dekselet?

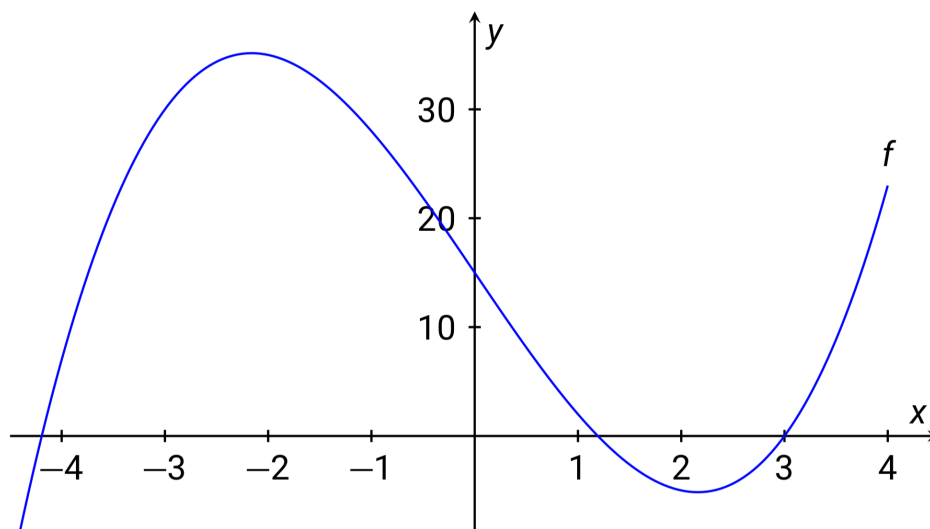
Ein kunde har kjøpt eit deksel som har ein feil.

b) Kva er sannsynet for at dekselet er produsert av maskin A?

### Oppgave 5 (4 poeng)

Nedanfor har vi teikna grafen til funksjonen  $f$  gitt ved

$$f(x) = x^3 - 14x + 15$$



a) Bestem eksakte verdiar for  $x$ -koordinata til toppunktet og til botnpunktet.

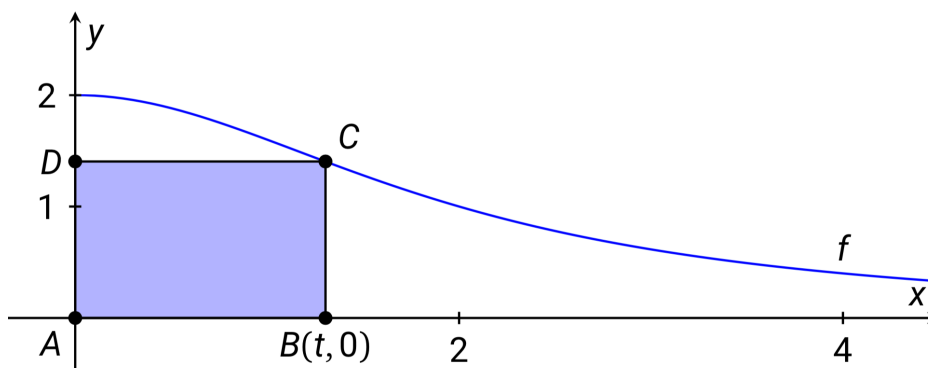
b) Løys ulikskapen  $f(x) > 0$  eksakt.

## Oppgave 6 (3 poeng)

Nedanfor har vi teikna grafen til funksjonen  $f$  gitt ved

$$f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}, \quad x > 0$$

Punkta  $A$ ,  $B$ ,  $C$  og  $D$  dannar eit rektangel. Punktet  $C$  ligg på grafen til  $f$ , og punkt  $D$  ligg på  $y$ -aksen. Punktet  $B$  har  $x$ -koordinat  $t$ . Punktet  $A$  ligg i origo.



Bestem  $t$  slik at arealet til rektangelet  $ABCD$  blir størst mogleg.

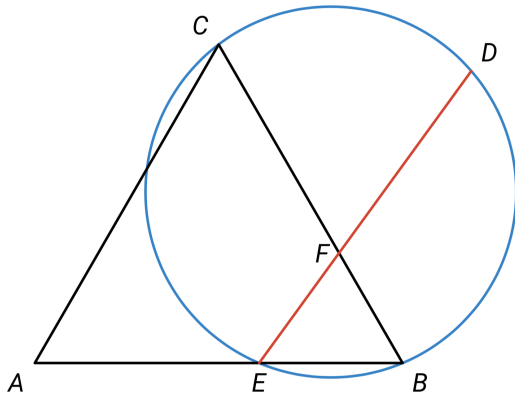
## Oppgave 7 (3 poeng)

I firkanten  $ABCD$  er  $AB = 3\text{cm}$ ,  $AC = 10\text{cm}$ ,  $CD = 9\text{cm}$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$  og  $\angle BAC = 75^\circ$

Konstruer firkanten. Hugs å skrive ei forklaring til konstruksjonen.

### Oppgave 8 (3 poeng)

Vi har gitt ein sirkel og ein likesida trekant  $ABC$ . Punkta  $B$  og  $C$  ligg på sirkelen. Eit punkt  $D$  ligg på sirkelen slik at sirkelbogen  $BD$  er  $108^\circ$ . Linjestykket  $AB$  skjer sirkelen i  $E$ , og linjestykket  $ED$  skjer  $BC$  i  $F$ . Sjå skissa nedanfor.



- Bestem  $\angle BED$ .
- Bestem  $\angle CFD$ .

### Oppgave 9 (5 poeng)

Ei linje  $\ell$  går gjennom punkta  $A(-2, 1)$  og  $B(4, 3)$ .

- Bestem ei parameterframstilling for  $\ell$ .
- Bestem skjæringspunkta mellom  $\ell$  og koordinataksane.

Ein sirkel har sentrum i  $S(1, 0)$  og tangerer  $\ell$ .

- Bestem radiusen til sirkelen.

## Del 2

### Oppgave 1 (6 poeng)

I tillegg til statsministeren er det 19 ministrar i regjeringa. Av desse 20 er 12 medlemmer i Høgre, 4 er medlemmer i Venstre, og 4 er medlemmer i Kristeleg Folkeparti.

Ved eit arrangement er det bestemt at 6 av ministrane skal vere til stades. Desse blir tilfeldig trekt ut blant dei 20 ministrane.

- Kva er sannsynet for at alle dei 6 som blir trekte ut, er frå Høgre?
- Bestem sannsynet for at statsministeren er blant dei som blir trekte ut.
- Bestem sannsynet for at 2 frå Høgre, 2 frå Venstre og 2 frå Kristeleg Folkeparti blir trekte ut.

### Oppgave 2 (6 poeng)

Posisjonen  $\vec{r}$  til ein partikkel ved eit tidspunkt  $t$  (målt i sekund) er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [t^2 - 7t + 11, t^3 - 6t^2 + 8t - 1], \quad 0 \leq t \leq 5$$

- Teikn grafen til  $\vec{r}$  i et koordinatsystem.
- Bestem banefarten til partikkelen etter 1 sekund.
- Ved kva tidspunkt er banefarten lågast i løpet av de 5 sekunda?

### Oppgave 3 (6 poeng)

For å berekne «hundevalderen» til ein hund har det vore vanleg å multiplisere antalet år hunden har levd, med 7. På den måten vil hundevalderen til ein hund som har levd i 5 år, vere 35.

No har nokre forskarar kome fram til modellen

$$h = 16 \cdot \ln(a) + 31$$

for samanhengen mellom hundevalderen  $h$  og antalet år  $a$  ein hund har levd.

- a) Dersom vi bruker denne modellen, vil hundevalderen til hunden Dennis vere 65. Kor mange år har Dennis levd?
- b) Lag ei grafisk framstilling der du lar  $a$  gå langs førsteaksen og  $h$  langs andreaksen.

Hundane Laika og Fido er venner. Bruker vi modellen til forskarane, var hundevalderen til Laika 20 meir enn hundevalderen til Fido for eitt år sidan. I dag er hundevalderen til Laika 10 meir enn hundevalderen til Fido.

- c) Kva er hundevalderen til Laika i dag?

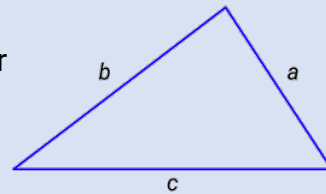


## Oppgave 4 (6 poeng)

### Herons formel

Arealet  $F$  til ein trekant med sidelengder  $a$ ,  $b$  og  $c$  er

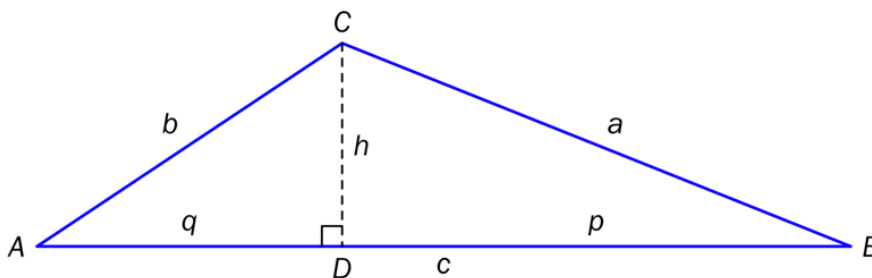
$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ der } s = \frac{a+b+c}{2}.$$



- a) Bruk formelen til å bestemme arealet til ein trekant med sidelengder 5, 7 og 8.

Vi vil no utleie Herons formel.

La  $ABC$  vere ein trekant der  $AB=c$ ,  $BC=a$  og  $AC=b$ . Normalen frå  $C$  ned på linja  $\ell$  gjennom punkta  $A$  og  $B$  skjer  $\ell$  i  $D$ . Vi set  $h=CD$ ,  $q=AD$  og  $p=DB$ .



Ved å bruke at  $q = c - p$  får vi at

$$q^2 = c^2 - 2cp + p^2.$$

- b) Bruk formelen over til å vise at  $b^2$  kan skrivast som  $b^2 = h^2 + c^2 - 2cp + p^2$ .
- c) Bruk blant anna resultatet frå oppgave b) til å vise at

$$p = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$$

- d) Bruk CAS til å vise at

$$\frac{1}{4}c^2 \left( a^2 - \left( \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \right)^2 \right) = s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)$$

Forklar kvifor dette beviser Herons formel.

## Bokmål

Eksamensinformasjon	
<b>Eksamenstid</b>	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
<b>Hjelpemidler</b>	Del 1: Skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. (På del 1 er det ikke tillatt å bruke datamaskin.)  Del 2: Etter tre timer er alle hjelpemidler tillatt, bortsett fra åpent Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon.  Når du bruker nettbaserte hjelpemidler under eksamen, har du ikke lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måter å utveksle informasjon med andre på er ikke tillatt.
<b>Informasjon om oppgaven</b>	Del 1 har 9 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver.  Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen.  Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres.
<b>Kilder</b>	Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet
<b>Informasjon om vurderingen</b>	Se eksamensveiledningen med kjennetegn på måloppnåelse til sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på Utdanningsdirektoratets nettsider.
<b>Vedlegg</b>	Vedlegg 1: Binomisk og hypergeometrisk fordeling

## Del 1

### Oppgave 1 (6 poeng)

Deriver funksjonene

a)  $f(x) = 3x^3 - 4x + \frac{1}{x}$

b)  $g(x) = 3x^2 \cdot \ln x$

c)  $h(x) = \sqrt{4x^2 - 5}$

### Oppgave 2 (4 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

a)  $\frac{3x}{x^2 - x - 2} - \frac{2x}{x+1} - \frac{2}{x-2}$

b)  $\ln(a \cdot b^2) - 8 \ln b + 2 \ln a^3 - 3 \ln \left( \frac{a^2}{b^2} \right)$

### Oppgave 3 (4 poeng)

Vi har gitt vektorene  $\vec{a} = [4, 1]$ ,  $\vec{b} = [-1, 3]$  og  $\vec{c} = [4, 14]$ .

a) Undersøk om  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

b) Bestem to tall  $r$  og  $s$  slik  $\vec{c} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ .

### Oppgave 4 (4 poeng)

En fabrikk har to maskiner, A og B, som produserer deksler til mobiltelefoner. Maskin A står for 40 prosent av produksjonen, mens maskin B står for 60 prosent av produksjonen.

Det viser seg at det er feil på 20 prosent av dekslene som er produsert av maskin A, og 10 prosent av dekslene som er produsert av maskin B.

Tenk deg at du skal trekke et tilfeldig deksel som er produsert av fabrikk.

a) Hva er sannsynligheten for at det er feil på dekslet?

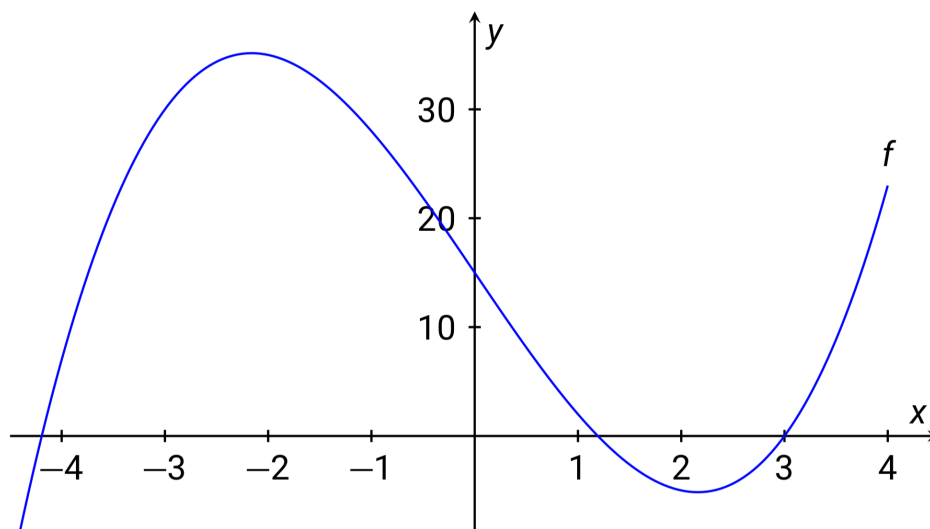
En kunde har kjøpt et deksel som har en feil.

b) Hva er sannsynligheten for at dekslet er produsert av maskin A?

### Oppgave 5 (6 poeng)

Nedenfor har vi tegnet grafen til funksjonen  $f$  gitt ved

$$f(x) = x^3 - 14x + 15$$



a) Bestem eksakte verdier for  $x$ -koordinatene til toppunktet og til bunnpunktet.

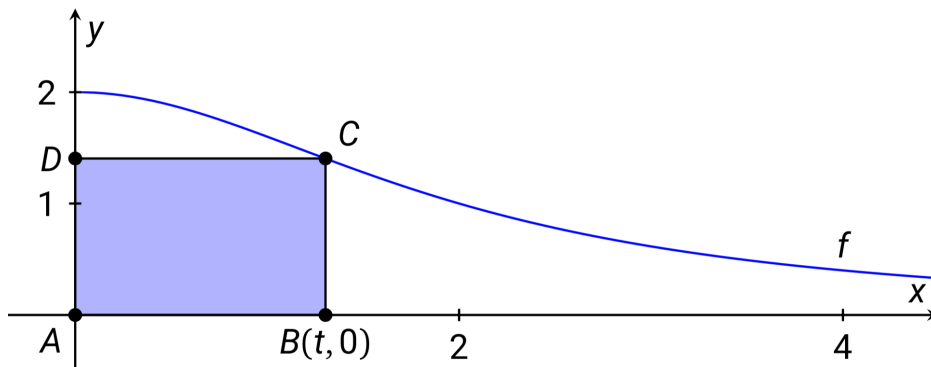
b) Løs ulikheten  $f(x) > 0$  eksakt.

### Oppgave 6 (3 poeng)

Nedenfor har vi tegnet grafen til funksjonen  $f$  gitt ved

$$f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}, \quad x > 0$$

Punktene  $A$ ,  $B$ ,  $C$  og  $D$  danner et rektangel. Punktet  $C$  ligger på grafen til  $f$ , og punktet  $D$  ligger på  $y$ -aksen. Punktet  $B$  har  $x$ -koordinat  $t$ . Punktet  $A$  ligger i origo.



Bestem  $t$  slik at arealet til rektangelet  $ABCD$  blir størst mulig.

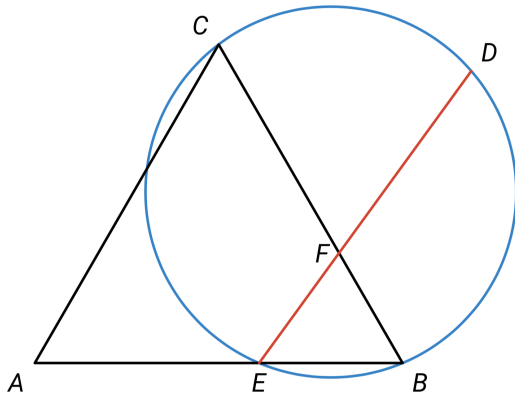
### Oppgave 7 (3 poeng)

I firkanten  $ABCD$  er  $AB = 3\text{cm}$ ,  $AC = 10\text{cm}$ ,  $CD = 9\text{cm}$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$  og  $\angle BAC = 75^\circ$

Konstruer firkanten. Husk å skrive en forklaring til konstruksjonen.

### Oppgave 8 (3 poeng)

Vi har gitt en sirkel og en likesidet trekant  $ABC$ . Punktene  $B$  og  $C$  ligger på sirkelen. Et punkt  $D$  ligger på sirkelen slik at sirkelbuen  $BD$  er  $108^\circ$ . Linjestykket  $AB$  skjærer sirkelen i  $E$ , og linjestykket  $ED$  skjærer  $BC$  i  $F$ . Se skissen nedenfor.



- Bestem  $\angle BED$ .
- Bestem  $\angle CFD$ .

### Oppgave 9 (5 poeng)

En linje  $\ell$  går gjennom punktene  $A(-2, 1)$  og  $B(4, 3)$ .

- Bestem en parameterframstilling for  $\ell$ .
- Bestem skjæringspunktene mellom  $\ell$  og koordinataksene.

En sirkel har sentrum i  $S(1, 0)$  og tangerer  $\ell$ .

- Bestem sirkelens radius.

## Del 2

### Oppgave 1 (6 poeng)

I tillegg til statsministeren er det 19 ministre i regjeringen. Av disse 20 er 12 medlemmer i Høyre, 4 er medlemmer i Venstre, og 4 er medlemmer i Kristelig Folkeparti.

Ved et arrangement er det bestemt at 6 av ministrene skal være til stede. Disse blir tilfeldig trukket blant de 20 ministrene.

- Hva er sannsynligheten for at alle de 6 som blir trukket ut, er fra Høyre?
- Bestem sannsynligheten for at statsministeren er blant dem som blir trukket ut.
- Bestem sannsynligheten for at 2 fra Høyre, 2 fra Venstre og 2 fra Kristelig Folkeparti blir trukket ut.

### Oppgave 2 (6 poeng)

Posisjonen  $\vec{r}$  til en partikkel ved et tidspunkt  $t$  (målt i sekunder) er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [t^2 - 7t + 11, t^3 - 6t^2 + 8t - 1], \quad 0 \leq t \leq 5$$

- Tegn grafen til  $\vec{r}$  i et koordinatsystem.
- Bestem banefarten til partikkelen etter 1 sekund.
- Ved hvilket tidspunkt er banefarten lavest i løpet av de 5 sekundene?

### Oppgave 3 (6 poeng)

For å beregne «hundevalderen» til en hund har det vært vanlig å multiplisere antall år hunden har levd, med 7. På den måten vil hundevalderen til en hund som har levd i 5 år, være 35.

Nå har noen forskere kommet fram til modellen

$$h = 16 \cdot \ln(a) + 31$$

for sammenhengen mellom hundevalderen  $h$  og antall år  $a$  en hund har levd.

- a) Dersom vi bruker denne modellen, vil hundevalderen til hunden Dennis være 65. Hvor mange år har Dennis levd?
- b) Lag en grafisk framstilling der du lar  $a$  gå langs førsteaksen og  $h$  langs andreaksen.

Hundene Laika og Fido er venner. Bruker vi forskernes modell, var hundevalderen til Laika 20 mer enn hundevalderen til Fido for ett år siden. I dag er hundevalderen til Laika 10 mer enn hundevalderen til Fido.

- c) Hva er hundevalderen til Laika i dag?

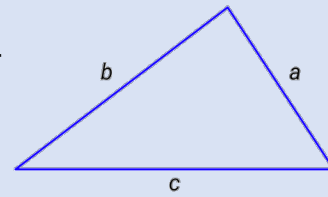


## Oppgave 4 (6 poeng)

### Herons formel

Arealet  $F$  til en trekant med sidelengder  $a$ ,  $b$  og  $c$  er

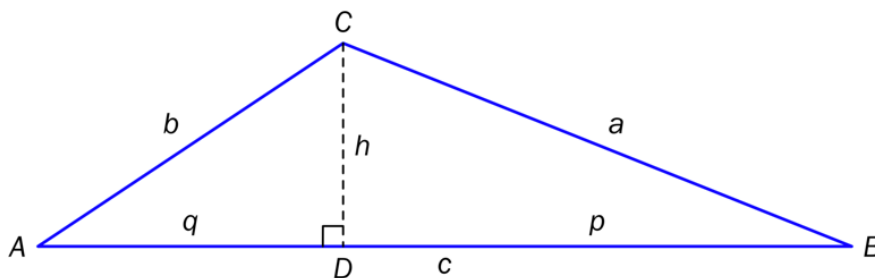
$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ der } s = \frac{a+b+c}{2}.$$



a) Bruk formelen til å bestemme arealet til en trekant med sidelengder 5, 7 og 8.

Vi vil nå utlede Herons formel.

La  $ABC$  være en trekant der  $AB=c$ ,  $BC=a$  og  $AC=b$ . Normalen fra  $C$  ned på linjen  $\ell$  gjennom punktene  $A$  og  $B$  skjærer  $\ell$  i  $D$ . Vi setter  $h=CD$ ,  $q=AD$  og  $p=DB$ .



Ved å bruke at  $q=c-p$  får vi at

$$q^2 = c^2 - 2cp + p^2.$$

b) Bruk formelen over til å vise at  $b^2$  kan skrives som  $b^2 = h^2 + c^2 - 2cp + p^2$ .

c) Bruk blant annet resultatet fra oppgave b) til å vise at

$$p = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$$

d) Bruk CAS til å vise at

$$\frac{1}{4}c^2 \left( a^2 - \left( \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \right)^2 \right) = s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)$$

Forklar hvorfor dette beviser Herons formel.

## Vedlegg 1

Binomisk fordeling:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Hypergeometrisk fordeling:

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k} \cdot \binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Blank side

### TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

**Lykke til!**

### TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

**Lykke til!**