Utdanningsdirektoratet

Eksamen

24.05.2022

REA3056 Matematikk R1

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timar. Delen utan og delen med hjelpemiddel skal delast ut samstundes. Delen utan hjelpemiddel skal leverast etter 1 time. Etter 1 time kan kandidaten bruke hjelpemiddel. Delen med hjelpemiddel skal leverast innan 5 timar.
Del utan hjelpemiddel	Vanlege skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar.
Del med hjelpemiddel	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte	Delen utan hjelpemiddel har 5 oppgåver. Delen med hjelpemiddel har 8 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Dersom oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, kan ein alternativ metode gi noko utteljing. Bruk av digitale verktøy skal dokumenterast.
Rettleiing om vurderinga	Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke hensiktsmessige hjelpemiddel – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar – vurderer om svar er rimelege
Andre opplysningar	Teikningar og grafiske framstillingar: Utdanningsdirektoratet

Del 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1

Deriver funksjonane

a) $f(x) = x^3 + \ln x$

b) $g(x) = x \cdot e^{2x}$

Oppgåve 2

Løys likninga

$$e^{2x} - e^x = 2$$

Oppgåve 3

Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2 + x - 12}$$

Oppgåve 4

Vi har tre punkt $A(1, 2)$, $B(-1, 5)$ og $C(t, 4)$ der $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestem t slik at $\angle BAC = 90^\circ$.

b) Bestem t slik at A, B og C ligg på ei rett linje.

Oppgåve 5

Ein elev har skrive programkoden nedanfor.

```python
def f(x):
    return x/(1+x**2)   # Definerer funksjonen f(x)=x/(1+x^2)

x = 0
h = 0.001
while f(x) <= f(x+h):
    x = x+h

print(x)
```

a) Forklar kva som skjer når programmet blir køyrd. Kva ønskjer eleven å finne ut?

b) Gjer nødvendige berekningar, og bestem svaret som eleven ønskjer å finne.

Del 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1

Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<2 \\ x-t\ , & x\geq 2 \end{cases}$$

a) Bestem talet t slik at f blir ein kontinuerleg funksjon. Hugs å grunngi svaret.

b) Avgjer om f er deriverbar i $x=2$ for den verdien av t du fann i oppgåve a).

Oppgåve 2

For vektorane $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ og $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$.

Vi lar $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ og $\vec{v}=\vec{a}-6\vec{b}$.

a) Bestem lengda av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

b) Bestem vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Oppgåve 3

Funksjon f er gitt ved

$$f(x)=x^3-6x$$

Bestem det største intervallet $I=[a,b]$ slik at $1\in I$ og f har ein omvend funksjon når I er definisjonsmengda til f.

Oppgåve 4

Ifølgje avkjølingslova til Newton vil temperaturen T til eit objekt etter t minutt vere gitt ved

$$\ln(T - T_0) = -k \cdot t + r$$

der T_0 er romtemperaturen, og der k og r er konstantar.

I eit rom med temperatur $22°\text{C}$ set vi ein kopp med kaffi. Ved tidspunktet $t = 0$ er temperaturen i kaffien $82°\text{C}$. Etter 2 minutt er temperaturen $66°\text{C}$.

Kor lang tid tek det før temperaturen i kaffien er mindre enn $40°\text{C}$?

Oppgåve 5

Gitt tre punkt $A(a,b)$, $B(c,d)$ og $C(e,f)$.

a) Beskriv ein algoritme som du kan bruke til å avgjere om $\triangle ABC$ er ein rettvinkla trekant.

b) Skriv ein kode basert på algoritmen du beskreiv i oppgåve a). Input skal vere koordinatane a, b, c, d, e og f. Output skal vere ein av følgjande tekstar:

- Punkta dannar ein rettvinkla trekant.
- Punkta dannar ikkje ein rettvinkla trekant.

Oppgåve 6

Ein funksjon g er gitt ved

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

Eit punkt $P(s, g(s))$ ligg på grafen til g, der $s \in \langle 1, 5 \rangle$.
Punkta $A(1, 0)$, $B(s, 0)$ og $P(s, g(s))$ dannar ein trekant ABP.

Bestem den eksakte verdien av s som gir det største arealet til trekanten.
Kor stort er dette arealet?

Oppgåve 7

Båten til ein pirat køyrer med konstant fart. Posisjonen $\vec{r}_1$ til båten etter t timar er

$$\vec{r}_1(t) = [2 + 24t, 4 + 20t]$$

Einingane langs aksane er kilometer.

a) Kor stor er banefarten til båten?

Politiet ønskjer å stoppe piraten. Samstundes som piraten er i punktet $(2,4)$, startar ein politibåt jakta si. Politibåten startar i punktet $(0,10)$ og held konstant fart langs ei rett linje. Posisjon $\vec{r}_2$ til politibåten er

$$\vec{r}_2(t) = [26t, 10 - 22t]$$

b) Undersøk om politiet vil møte piraten.

Ein annan politibåt startar òg i $(0,10)$. Denne båten held òg konstant fart.

c) Kor stor må banefarten til denne båten vere dersom dei skal treffe piraten i punktet $(8,9)$?

Bla om

Oppgåve 8

Funksjonane f og g er gitt ved

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x + 3$$
$$g(x) = 2x + 3$$

a) Vis at grafane til dei to funksjonane tangerer kvarandre i eitt punkt og skjer kvarandre i eit anna punkt.

Einar og Lise har jobba med slike funksjonar. Dei påstår å ha funne ein samanheng:

Dersom $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ og $G(x) = cx + d$, så vil grafane til F og G tangere kvarandre.

b) Avgjer om det Einar og Lise har komme fram til, kan stemme.

Lise har funne ein samanheng mellom x-koordinaten til vendepunktet til F og x-koordinaten til skjeringspunktet mellom grafane til F og G.

c) Kva for ein samanheng kan Lise ha funne?
Grunngi at denne samanhengen stemmer.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer. Delen uten og delen med hjelpemidler skal deles ut samtidig. Delen uten hjelpemidler skal leveres etter 1 time. Etter 1 time kan kandidaten bruke hjelpemidler. Delen med hjelpemidler skal leveres innen 5 timer.
Del uten hjelpemidler	Vanlige skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler.
Del med hjelpemidler	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte	Delen uten hjelpemidler har 5 oppgaver. Delen med hjelpemidler har 8 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi noe uttelling. Bruk av digitale verktøy skal dokumenteres.
Veiledning om vurderingen	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger – vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger	Tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

Del 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1

Deriver funksjonene

a) $f(x) = x^3 + \ln x$

b) $g(x) = x \cdot e^{2x}$

Oppgave 2

Løs likningen

$$e^{2x} - e^x = 2$$

Oppgave 3

Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2 + x - 12}$$

Oppgave 4

Vi har tre punkter $A(1, 2)$, $B(-1, 5)$ og $C(t, 4)$ der $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestem t slik at $\angle BAC = 90°$.

b) Bestem t slik at A, B og C ligger på en rett linje.

Oppgave 5

En elev har skrevet programkoden nedenfor.

```python
def f(x):
    return x/(1+x**2)   # Definerer funksjonen f(x)=x/(1+x^2)

x = 0
h = 0.001
while f(x) <= f(x+h):
    x = x+h

print(x)
```

a) Forklar hva som skjer når programmet kjøres. Hva ønsker eleven å finne ut?

b) Gjør nødvendige beregninger, og bestem svaret som eleven ønsker å finne.

Del 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1

En funksjon f er gitt ved

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<2 \\ x-t\ , & x\geq 2 \end{cases}$$

a) Bestem tallet t slik at f blir en kontinuerlig funksjon. Husk å begrunne svaret.

b) Avgjør om f er deriverbar i $x=2$ for den verdien av t du fant i oppgave a).

Oppgave 2

For vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ og $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$.

Vi lar $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ og $\vec{v}=\vec{a}-6\vec{b}$.

a) Bestem lengden av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

b) Bestem vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Oppgave 3

Funksjon f er gitt ved

$$f(x)=x^3-6x$$

Bestem det største intervallet $I=[a,b]$ slik at $1\in I$ og f har en omvendt funksjon når I er definisjonsmengden til f.

Oppgave 4

Ifølge Newtons avkjølingslov vil temperaturen T til et objekt etter t minutter være gitt ved

$$\ln(T - T_0) = -k \cdot t + r$$

hvor T_0 er romtemperaturen, og der k og r er konstanter.

I et rom med temperatur $22\,^\circ\text{C}$ setter vi en kopp med kaffe. Ved tidspunktet $t = 0$ er temperaturen i kaffen $82\,^\circ\text{C}$. Etter 2 minutter er temperaturen $66\,^\circ\text{C}$.

Hvor lang tid tar det før temperaturen i kaffen er mindre enn $40\,^\circ\text{C}$?

Oppgave 5

Gitt tre punkter $A(a,b)$, $B(c,d)$ og $C(e,f)$.

a) Beskriv en algoritme som du kan bruke til å avgjøre om $\triangle ABC$ er en rettvinklet trekant.

b) Skriv en kode basert på algoritmen du beskrev i oppgave a). Input skal være koordinatene a, b, c, d, e og f. Output skal være en av følgende tekster:

- Punktene danner en rettvinklet trekant.
- Punktene danner ikke en rettvinklet trekant.

Oppgave 6

En funksjon g er gitt ved

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

Et punkt $P(s, g(s))$ ligger på grafen til g, der $s \in \langle 1, 5 \rangle$.
Punktene $A(1, 0)$, $B(s, 0)$ og $P(s, g(s))$ danner en trekant ABP.

Bestem den eksakte verdien av s som gir det største arealet til trekanten.
Hvor stort er dette arealet?

Oppgave 7

Båten til en pirat kjører med konstant fart. Posisjonen $\vec{r}_1$ til båten etter t timer er

$$\vec{r}_1(t) = [2 + 24t, 4 + 20t]$$

Enhetene langs aksene er kilometer.

a) Hvor stor er banefarten til båten?

Politiet ønsker å stoppe piraten. Samtidig som piraten er i punktet $(2,4)$, starter en politibåt sin jakt. Politibåten starter i punktet $(0,10)$ og holder konstant fart langs en rett linje. Posisjon $\vec{r}_2$ til politibåten er

$$\vec{r}_2(t) = [26t, 10 - 22t]$$

b) Undersøk om politiet vil møte piraten.

En annen politibåt starter også i $(0, 10)$. Denne båten holder også konstant fart.

c) Hvor stor må banefarten til denne båten være dersom de skal treffe piraten i punktet $(8, 9)$?

Oppgave 8

Funksjonene f og g er gitt ved

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x + 3$$
$$g(x) = 2x + 3$$

a) Vis at grafene til de to funksjonene tangerer hverandre i ett punkt og skjærer hverandre i et annet punkt.

Einar og Lise har jobbet med slike funksjoner. De påstår å ha funnet en sammenheng:

> Dersom $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ og $G(x) = cx + d$, så vil grafene til F og G tangere hverandre.

b) Avgjør om det Einar og Lise har kommet fram til, kan stemme.

Lise har funnet en sammenheng mellom x-koordinaten til vendepunktet til F og x-koordinaten til skjæringspunktet mellom grafene til F og G.

c) Hvilken sammenheng kan Lise ha funnet?
Begrunn at denne sammenhengen stemmer.

Utdannings-
direktoratet

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!