

Eksamen

23.05.2023

REA3056 Matematikk R1



Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timar. Delen utan og delen med hjelpemiddel skal delast ut samstundes. Delen utan hjelpemiddel skal leverast etter 1 time. Etter 1 time kan kandidaten bruke hjelpemiddel. Delen med hjelpemiddel skal leverast innan 5 timar.
Del utan hjelpemiddel	Vanlege skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar.
Del med hjelpemiddel	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte	Delen utan hjelpemiddel har 4 oppgåver. Delen med hjelpemiddel har 7 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Dersom oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, kan ein alternativ metode gi noko utteljing. Bruk av digitale verktøy skal dokumenterast.
Rettleiing om vurderinga	Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du <ul style="list-style-type: none">– viser rekneferdigheiter og matematisk forståing– gjennomfører logiske resonnement– ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar– kan bruke hensiktsmessige hjelpemiddel– forklarar framgangsmåtar og grunngir svar– skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar– vurderer om svar er rimelege
Om vekting av oppgåvene	Alle deloppgåvene vert vekta likt. Oppgåve 7 i del 2 blir vektlagt tilsvarande to deloppgåver.
Andre opplysningar	Teikningar og grafiske framstillingar: Utdanningsdirektoratet

Del 1

Oppgave 1

Deriver funksjonen

$$f(x) = e^x + \ln x$$

Oppgave 2

Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$

Oppgave 3

Gitt tre punkt $A(1, 3)$, $B(4, 0)$ og $C(9, 4)$.

- a) Bruk vektorregning til å avgjøre om $\angle CBA$ er mindre enn, lik eller større enn 90° .

Et punkt P ligger på linjen som går gjennom B og C .

- b) Bruk vektorregning til å bestemme koordinatene til punktet P slik at $\vec{AB} \perp \vec{AP}$.

Oppgave 4

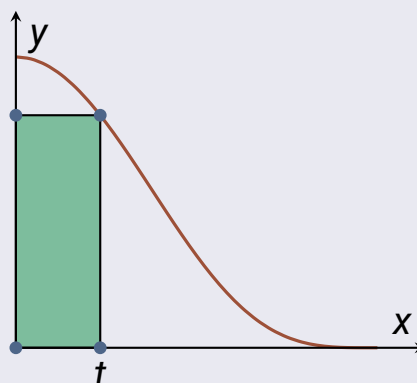
Ein elev har fått følgjande oppgåve:

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = (x^2 - 9)^4, \quad x \in \langle 0, 3 \rangle$$

Eit rektangel R har hjørne i $(0, 0)$,
 $(t, 0)$, $(t, f(t))$ og $(0, f(t))$.

Bestem den verdien av t som gjer at
 R har størst areal.



For å løyse oppgåva har eleven laga følgjande program:

```
1 def A(x):
2     return x*(x**2-9)**4
3
4 t = 0
5 d = 0.01
6
7 while A(t) < A(t+d):
8     t = t + d
9
10 print(t)
```

- Forklar strategien eleven har brukt for å løyse oppgåva.
- Løys oppgåva eleven har fått.

Del 2

Oppgave 1

Tabellen nedanfor viser timelønna til ei yrkesgruppe for nokre år i perioden 2008–2022.

Årstall	2008	2010	2013	2015	2019	2022
Timelønn	272,55	285,50	307,30	314,00	327,60	340,10

- Kva har den gjennomsnittlege årlege prosentvise veksten i lønn vore i åra 2008–2022?
- Bruk tala i tabellen til å lage ein eksponentialfunksjon g som er ein modell for timelønna til denne yrkesgruppa x år etter 2008.

Per og Amalie hadde begge ei timelønn på 272,55 kroner i 2008. Per har hatt ei lønnsutvikling tilsvarande tabellen i starten av oppgåva, medan Amalie si lønn har stige med 2,3 prosent per år. Dei har begge jobba 1700 timar per år.

- Bestem den samla lønna til Amalie i åra 2008 til 2022.
Bestem også den samla lønna til Per i desse åra.

Fagforeininga til Per krev at han i 2025 skal ha same timelønn som Amalie. Vi går ut frå at Amalie framleis vil ha ein lønnsvekst på 2,3 prosent per år.

- Kor mange prosent må lønna til Per gå opp kvart år dersom dette kravet skal bli innfridd?

Oppgave 2

Vi har gitt punktet $A(3, 2)$. Vektorane \vec{u} og \vec{v} er gitt ved

$$\vec{u} = [4, 3] \quad \text{og} \quad \vec{v} = [2t, 5t]$$

Eit parallelogram $ABCD$ er bestemt ved at $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ og $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$.

- Bestem koordinatane til B og koordinatane til C og D uttrykte ved t .
- Bestem t slik at skjæringspunktet mellom diagonalane i parallelogrammet blir $P(8, 11)$.

Oppgave 3

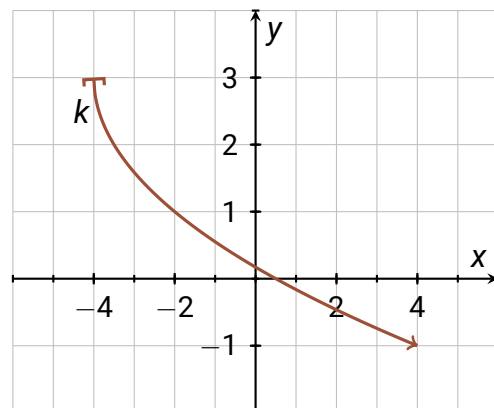
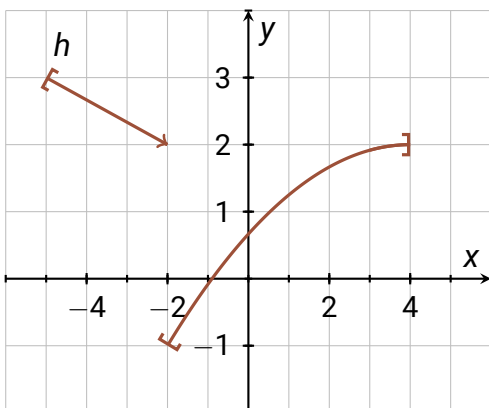
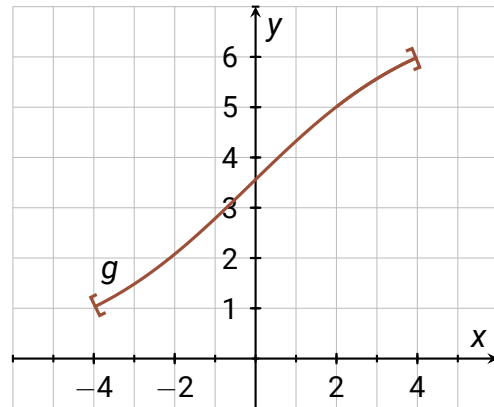
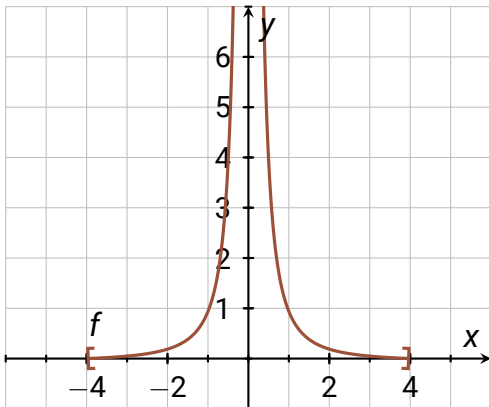
Nedanfor ser du tre påstandar. Avgjer i kvart tilfelle om påstanden er sann eller usann. Hugs å vise tydeleg korleis du argumenterer og resonnerer.

- Dersom $x > 0$, så er $(\ln x)^4 = 4 \ln x$.
- Alle fjerdegradsfunksjonar må ha minst eitt ekstremalpunkt.
- For at ein funksjon skal ha ein omvend funksjon, må funksjonen vere anten strengt veksande eller strengt minkande.

Oppgave 4

Nedanfor har vi teikna grafane til fire funksjonar f , g , h og k .

- Avgjer og grunngi i kvart tilfelle om funksjonen har ein omvend funksjon.
- Bestem definisjonsmengda til den omvendte funksjonen i dei tilfella der han finst.



Oppgave 5

Samanhengen mellom lydstyrken L (målt i dB) og lydintensiteten I (målt i W/m^2) er gitt ved

$$L = 120 + 10 \cdot \lg I$$

Øyrene til menneske har ei smertegrense for lydstyrke som ligg omkring 130 dB.

- Bestem lydintensiteten når lydstyrken er 130 dB.
- Kor mange prosent aukar lydintensiteten dersom lydstyrken aukar med 2 dB?

Dersom effekten til lyden som blir sendt ut frå ei lydkjelde er E , vil lydintensiteten I på ein avstand r (målt i m) frå denne lydkjelda vere

$$I = \frac{E}{4\pi r^2}$$

Lydstyrken frå eit fly er 140 dB dersom du er 50 m frå flyet.

- Bestem den minste avstanden til dette flyet der lydstyrken er lågare enn 130 dB.

Oppgave 6

Ei linje ℓ går gjennom punkta $A(4, -2)$ og $B(6, 6)$.

- Bestem den eksakte avstanden frå punktet $P(2, 8)$ til linja ℓ .

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 + 2x$$

- Bestem den eksakte verdien for den minste avstanden mellom grafen til f og linja ℓ .

Oppgave 7

I denne oppgava skal du bruke algoritmen nedanfor til å finne ein tilnærma verdi for gjennomsnittet til ein funksjon f i eit intervall $[a, b]$.

Algoritme

Vel $N + 1$ tal jamt fordelte i intervallet $[a, b]$.

La $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ være desse tala.

Avstanden mellom eit av tala og det neste er då $\frac{b - a}{N}$.

Rekn ut gjennomsnittet g av tala $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N)$.

Då er g ein tilnærma verdi for gjennomsnittsverdien til f i $[a, b]$.

Denne tilnærminga blir betre dess større N er.

Lag eit program som du kan bruke til å bestemme gjennomsnittet til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \sqrt{x}$$

i intervallet $[0, 1]$. Kva blir dette gjennomsnittet?

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	<p>Eksamen varer i 5 timer.</p> <p>Delen uten og delen med hjelpemiddel skal delast ut samstundes. Delen uten og delen med hjelpemidler skal deles ut samtidig. Delen uten hjelpemidler skal leveres etter 1 time.</p> <p>Etter 1 time kan kandidaten bruke hjelpemidler.</p> <p>Delen med hjelpemidler skal leveres innen 5 timer.</p>
Del uten hjelpemidler	Vanlige skrivesaker, passsar, linjal og vinkelmåler.
Del med hjelpemiddel	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av internett og andre verktøy som kan brukes til å kommunikasjon.
Framgangsmåte	<p>Delen uten hjelpemidler har 4 oppgaver.</p> <p>Delen med hjelpemidler har 7 oppgaver.</p> <p>Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgavem krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi noe uttelling.</p> <p>Bruk av digitale verktøy skal dokumenteres.</p>
Rettleiing om vurderinga	<p>Karakteren blir fastsett etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du</p> <ul style="list-style-type: none">– viser regneferdigheter og matematisk forståelse– gjennomfører logiske resonnementer– ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar– kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler– forklarer framgangsmåtar og grunngir svar– skriver oversiktlig og er nøyaktig med utrekninger, benevninger, tabellar og grafiske framstillinger– vurderer om svar er rimelige
Om vekting av oppgavene	Alle deloppgavene vektas likt. Oppgave 7 i del 2 blir vektlagt tilsvarende to deloppgaver.
Andre opplysningar	Tegningar og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

Del 1

Oppgave 1

Deriver funksjonen

$$f(x) = e^x + \ln x$$

Oppgave 2

Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$

Oppgave 3

Gitt tre punkt $A(1, 3)$, $B(4, 0)$ og $C(9, 4)$.

- a) Bruk vektorregning til å avgjøre om $\angle CBA$ er mindre enn, lik eller større enn 90° .

Et punkt P ligger på linjen som går gjennom B og C .

- b) Bruk vektorregning til å bestemme koordinatene til punktet P slik at $\vec{AB} \perp \vec{AP}$.

Oppgave 4

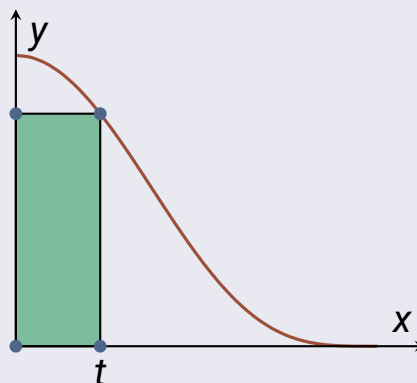
En elev elev har fått følgende oppgave:

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = (x^2 - 9)^4, \quad x \in \langle 0, 3 \rangle$$

Et rektangel R har hjørner i $(0, 0)$, $(t, 0)$, $(t, f(t))$ og $(0, f(t))$.

Bestem den verdien av t som gjør at R har størst areal.



For å løse oppgaven har eleven laget følgende program:

```
1 def A(x):
2     return x*(x**2-9)**4
3
4 t = 0
5 d = 0.01
6
7 while A(t) < A(t+d):
8     t = t + d
9
10 print(t)
```

- Forklar strategien eleven har brukt for å løse oppgaven.
- Løs oppgaven eleven har fått.

Del 2

Oppgave 1

Tabellen nedenfor viser timelønnen til en yrkesgruppe for noen år i perioden 2008–2022.

Årstall	2008	2010	2013	2015	2019	2022
Timelønn	272,55	285,50	307,30	314,00	327,60	340,10

- Hva har den gjennomsnittlige årlige prosentvise veksten i lønn vært i årene 2008–2022?
- Bruk tallene i tabellen til å lage en eksponentialfunksjon g som er en modell for timelønnen til denne yrkesgruppen x år etter 2008.

Per og Amalie hadde begge en timelønn på 272,55 kroner i 2008. Per har hatt en lønnsutvikling tilsvarende tabellen i starten av oppgaven, mens Amalies lønn har steget med 2,3 prosent per år. De har begge jobbet 1700 timer per år.

- Bestem den samlede lønnen til Amalie i årene 2008 til 2022. Bestem også den samlede lønnen til Per i disse årene.

Fagforeningen til Per krever at han i 2025 skal ha samme timelønn som Amalie. Vi går ut fra at Amalie fortsatt vil ha en lønnsvekst på 2,3 prosent per år.

- Hvor mange prosent må lønnen til Per gå opp hvert år dersom dette kravet skal innfris?

Oppgave 2

Vi har gitt punktet $A(3, 2)$. Vektorene \vec{u} og \vec{v} er gitt ved

$$\vec{u} = [4, 3] \quad \text{og} \quad \vec{v} = [2t, 5t]$$

Et parallellogram $ABCD$ er bestemt ved at $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ og $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$.

- Bestem koordinatene til B og koordinatene til C og D uttrykt ved t .
- Bestem t slik at skjæringspunktet mellom diagonalene i parallellogrammet blir $P(8, 11)$.

Oppgave 3

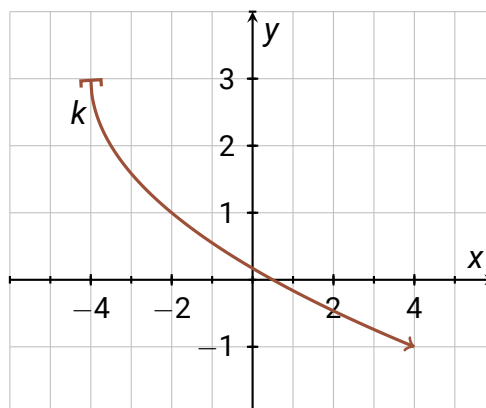
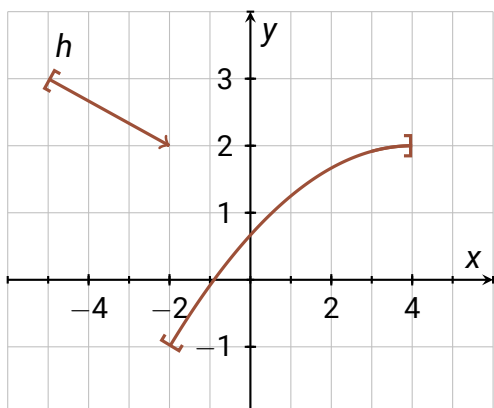
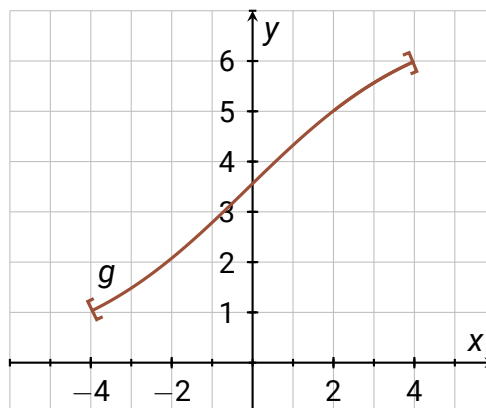
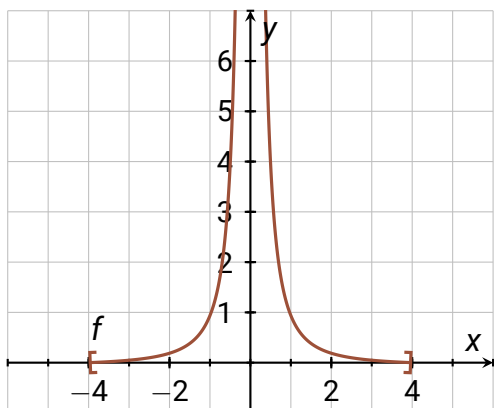
Nedenfor ser du tre påstander. Avgjør i hvert tilfelle om påstanden er sann eller usann. Husk å vise tydelig hvordan du argumenterer og resonnerer.

- Hvis $x > 0$, så er $(\ln x)^4 = 4 \ln x$.
- Alle fjerdegradsfunksjoner må ha minst ett ekstremalpunkt.
- For at en funksjon skal ha en omvendt funksjon, må funksjonen være enten strengt voksende eller strengt avtakende.

Oppgave 4

Nedenfor har vi tegnet grafene til fire funksjoner f , g , h og k .

- Avgjør og begrunn i hvert tilfelle om funksjonen har en omvendt funksjon.
- Bestem definisjonsmengden til den omvendte funksjonen i de tilfellene der den finnes.



Oppgave 5

Sammenhengen mellom lydstyrken L (målt i dB) og lydintensiteten I (målt i W/m^2) er gitt ved

$$L = 120 + 10 \cdot \lg I$$

Menneskets øre har en smertegrense for lydstyrke som ligger omkring 130 dB.

- Bestem lydintensiteten når lydstyrken er 130 dB.
- Hvor mange prosent øker lydintensiteten dersom lydstyrken øker med 2 dB?

Dersom effekten til lyden som sendes ut fra en lydkilde er E , vil lydintensiteten I på en avstand r (målt i m) fra denne lydkilden være

$$I = \frac{E}{4\pi r^2}$$

Lydstyrken fra et fly er 140 dB dersom du er 50 m fra flyet.

- Bestem den minste avstanden til dette flyet der lydstyrken er lavere enn 130 dB.

Oppgave 6

En linje ℓ går gjennom punktene $A(4, -2)$ og $B(6, 6)$.

- Bestem den eksakte avstanden fra punktet $P(2, 8)$ til linjen ℓ .

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 + 2x$$

- Bestem den eksakte verdien for den minste avstanden mellom grafen til f og linjen ℓ .

Oppgave 7

I denne oppgaven skal du bruke algoritmen nedenfor til å finne en tilnærmet verdi for gjennomsnittet til en funksjon f i et intervall $[a, b]$.

Algoritme

Velg $N + 1$ tall jevnt fordelt i intervallet $[a, b]$.

La $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ være disse tallene.

Avstanden mellom et av tallene og det neste er da $\frac{b - a}{N}$.

Regn ut gjennomsnittet g av tallene $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N)$.

Da er g en god tilnærmet verdi for gjennomsnittet til f i $[a, b]$.

Denne tilnærmingen blir bedre dess større N er.

Lag et program som du kan bruke til å bestemme gjennomsnittet til funksjonen g gitt ved

$$f(x) = \sqrt{x}$$

i intervallet $[0, 1]$. Hva blir dette gjennomsnittet?

Blank side

Blank side

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!