Eksamen

24.05.2024

REA3056 Matematikk R1

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timar. Delen utan og delen med hjelpemiddel skal delast ut samstundes. Delen utan hjelpemiddel skal leverast etter 1 time. Etter 1 time kan kandidaten bruke hjelpemiddel. Delen med hjelpemiddel skal leverast innan 5 timar.
Del utan hjelpemiddel	Vanlege skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar.
Del med hjelpemiddel	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av internett og andre verktøy som kan brukast til kommunikasjon. Automatisk tekstgenerator som chatbot, copilot eller tilsvarande er ikkje tillate.
Framgangsmåte	Delen utan hjelpemiddel har 5 oppgåver. Delen med hjelpemiddel har 7 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Dersom oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, kan ein alternativ metode gi noko utteljing. Bruk av digitale verktøy skal dokumenterast.
Rettleiing om vurderinga	Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke hensiktsmessige hjelpemiddel – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar – vurderer om svar er rimelege
Vekting av oppgåvene	Alle deloppgåvene blir vekta likt.
Andre opplysningar	Teikningar og grafiske framstillingar: Utdanningsdirektoratet Oppgåve 5, del 2: Datasett frå ssb.no/statbank/table/07849/

Del 1

Oppgåve 1 (2 poeng)

Deriver funksjonen.

$$f(x) = 4x^2 \cdot \ln(3x)$$

Oppgåve 2 (2 poeng)

Løys likninga.

$$(\ln x)^2 - \ln x = 6$$

Oppgåve 3 (2 poeng)

Funksjonen *f* er gitt ved

$$f(x) = e^{-x+1}, \quad D_f = \mathbb{R}.$$

Bestem grenseverdiane $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ og $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ dersom dei eksisterer.

Oppgåve 4 (4 poeng)

Vi har gitt tre punkt $A(3, 4)$, $B(-1, -2)$ og $C(3+t, 2t)$ der $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestem *t* slik at punkta *A*, *B* og *C* ligg på ei rett linje.

b) Bestem *t* slik at punkta *A*, *B* og *C* dannar ein trekant slik at $\angle C = 90°$.

Oppgåve 5 (2 poeng)

Ein funksjon *f* er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - x, & 2 < x \leq 5 \end{cases}.$$

Gi funksjonen *f* ei ny definisjonsmengd slik at følgjande er oppfylt samtidig:

- *f* skal vere kontinuerleg.
- Den nye definisjonsmengda skal vere så stor som mogleg.
- Verdimengda til *f* skal vere uendra.

Del 2

Oppgåve 1 (6 poeng)

Ein influensaepidemi bryt ut på ein vidaregåande skule med 1000 elevar. I starten er det få smitta, men talet aukar raskt. Talet på smitta elevar $S(t)$ etter t dagar er tilnærma gitt ved

$$S(t) = \frac{300}{1+28\cdot e^{-0,3t}}\ .$$

a) Kor lang tid tek det før 100 elevar er smitta?

b) På kva for eit tidspunkt blir flest elevar smitta, og kor raskt spreier smitten seg då?

c) Undersøk om S har asymptotar, og forklar kva praktisk tolking asymptotane eventuelt har.

Oppgåve 2 (6 poeng)

Avgjer om kvar av påstandane nedanfor er sann eller usann. Forklar tydeleg korleis du har resonnert.

a) **Påstand:** Når $x>0$, er $e^{k\cdot\ln(x)} = x^k$.

b) Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^3-2, & x<2 \\ 3x^2-4, & x\geq 2 \end{cases}\ .$$

Påstand: Funksjonen er deriverbar i $x=2$.

c) **Påstand:** Ein funksjon som er både minkande og veksande i definisjonsmengda si, kan ha ein omvend funksjon.

Oppgåve 3 (6 poeng)

To bilar, *A* og *B*, køyrer på kvar sin veg. Posisjonen til bil *A* er gitt ved $\vec{r_A}(t)$, og posisjonen til bil *B* er gitt ved $\vec{r_B}(t)$, der

$$\vec{r_A}(t) = \left[\frac{1}{2}(t-4), t\right] \quad \text{og} \quad \vec{r_B}(t) = \left[\frac{1}{2}t, \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{5}\right)\right].$$

Her er *t* tida målt i minutt, og avstandane er målte i kilometer.

a) Bestem avstanden i luftlinje mellom bilane etter 1 minutt.

Ein av vegane er ein motorveg. Den andre vegen er ein veg med lågare fartsgrense.

b) Gjer berekningar og argumenter for kva for ein av bilane som er på motorvegen.

Vegane kryssar kvarandre i eit vegkryss.

c) Gjer berekningar og argumenter for kva for ein av bilane som kjem til vegkrysset først.

Oppgåve 4 (4 poeng)

Momentmagnitudeskalaen er ein skala for å måle storleiken på jordskjelv. Samanhengen mellom momentmagnituden *M* og energien *E* er

$$M = \frac{2}{3}\lg(E) - 3{,}2 \ .$$

Energien *E* blir målt i joule (J).

a) Bestem eit uttrykk for energien *E* som blir løyst ut i eit jordskjelv, uttrykt ved momentmagnituden *M*. Bruk dette uttrykket til å rekne ut kor mykje energi som blir løyst ut i eit jordskjelv som måler 4,7 på momentmagnitudeskalaen.

b) Kor mange gonger så stor er energien som blir løyst ut i eit jordskjelv, dersom *M* aukar med 1?

Oppgåve 5 (4 poeng)

Det har vore ei stor endring i kva type drivstoff bilane i Noreg bruker. Statistisk sentralbyrå samlar inn data om dette, og tabellen viser ei oversikt over typen drivstoff til registrerte personbilar i Moss i perioden 2010—2022.

a) Bruk opplysningane i tabellen til å lage modellar du meiner beskriv utviklinga i drivstofftypane bensin og elektrisk («El.») *t* år etter 2010. Argumenter for val av modellar.

b) Ut frå modellane du har laga, korleis vil du vurdere veksten i drivstofftypane bensin og elektrisk i åra framover, etter 2022? Kommenter gyldigheita til modellane dine.

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Personbiler													
K-3103 Moss													
Bensin	14 185	13 592	13 246	12 944	12 578	12 367	11 472	11 079	10 516	10 323	9 706	9 210	8 705
Diesel	5 756	6 791	7 590	8 308	8 973	9 609	9 913	10 055	9 967	9 908	9 406	8 931	8 533
Parafin	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Gass	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	3	2
El.	2	14	35	111	307	557	754	1 071	1 467	2 057	2 810	4 031	5 363
Annet drivstoff	1	1	1	16	8	9	803	1 209	1 613	2 006	2 491	3 060	3 414

Fotnoter

Annet drivstoff inneholder hovedsakelig hybrid.

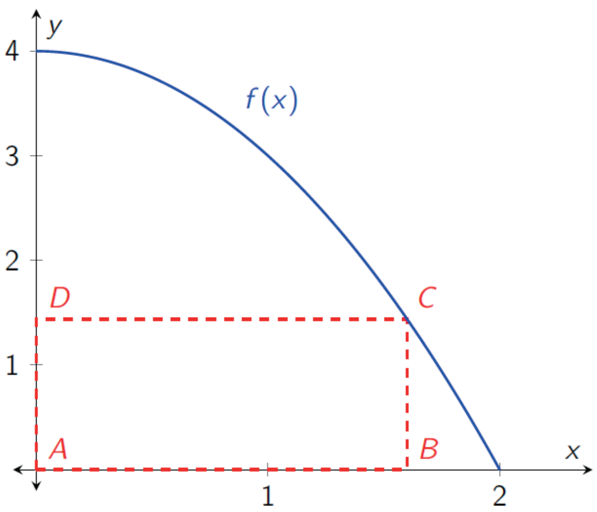
Kjelde: Skjermdump av ssb.no, utdrag frå tabell 07849

Oppgåve 6 (4 poeng)

Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x) = -x^2 + 4\,, \quad 0 \le x \le 2\,.$$

Lars har teikna grafen til f med eit innskrive rektangel *ABCD*. Lars har også skrive eit program.




```
def f(x):
    return -x**2 + 4

def areal(x):
    return x*f(x)

h = 0.0001
def der_areal(x):
    return (areal(x + h) - areal(x))/h

x = 0
dx = 0.01
while der_areal(x + dx) > 0:
    x = x + dx

print(areal(x))
```

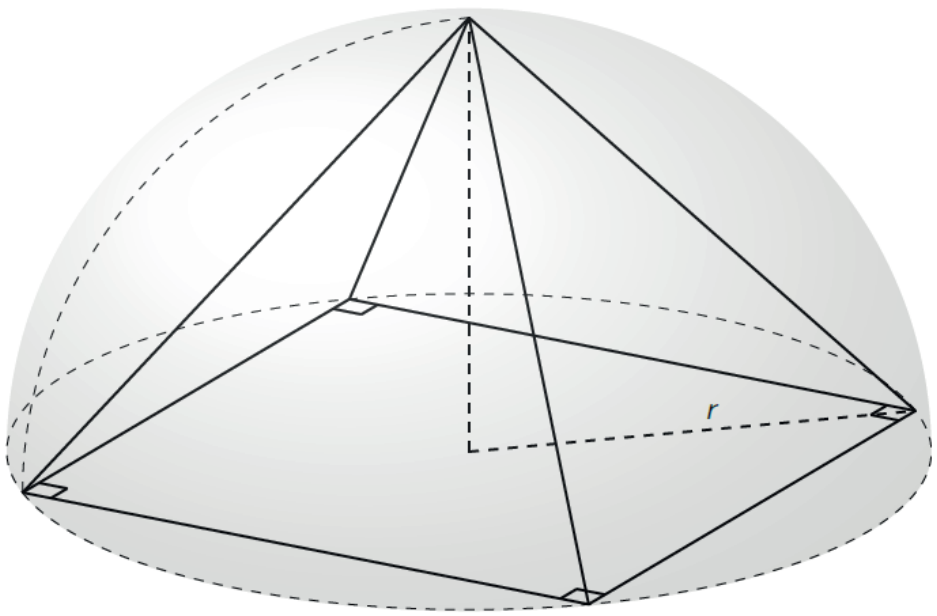
a) Forklar kva Lars prøver å finne ut med programmet. Kva blir svaret viss ein køyrer programmet?

b) Kva strategi bruker Lars i programmet sitt? Vil strategien fungere uavhengig av kva for ein funksjon f er?

Oppgåve 7 (2 poeng)

Ei kule med radius r blir delt i to like delar. Vi skal skjere ut ein pyramide med rektangulær grunnflate av den eine halvkula. Grunnflata skal liggje i snittflata til halvkula.

Bestem eit uttrykk for det største volumet ein slik pyramide kan ha.



Volumet av ein pyramide er gitt ved

$$V = \frac{h \cdot G}{3} ,$$

der G er grunnflata og h er høgda til pyramiden.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer. Delen uten og delen med hjelpemidler skal deles ut samtidig. Delen uten hjelpemidler skal leveres etter 1 time. Etter 1 time kan kandidaten bruke hjelpemidler. Delen med hjelpemidler skal leveres innen 5 timer.
Del uten hjelpemidler	Vanlige skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler.
Del med hjelpemidler	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon. Automatisk tekstgenerator som chatbot, copilot eller tilsvarende teknologi er ikke tillatt.
Framgangsmåte	Delen uten hjelpemidler har 5 oppgaver. Delen med hjelpemidler har 7 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi noe uttelling. Bruk av digitale verktøy skal dokumenteres.
Veiledning om vurderingen	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger – vurderer om svar er rimelige
Vekting av oppgavene	Alle deloppgavene blir vektet likt.
Andre opplysninger	Tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet Oppgave 5, del 2: Datasett fra ssb.no/statbank/table/07849/

Del 1

Oppgave 1 (2 poeng)

Deriver funksjonen.

$$f(x) = 4x^2 \cdot \ln(3x)$$

Oppgave 2 (2 poeng)

Løs likningen.

$$(\ln x)^2 - \ln x = 6$$

Oppgave 3 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = e^{-x+1}, \quad D_f = \mathbb{R} .$$

Bestem grenseverdiene $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ og $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ dersom de eksisterer.

Oppgave 4 (4 poeng)

Vi har gitt tre punkter $A(3,4)$, $B(-1,-2)$ og $C(3+t, 2t)$ der $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestem *t* slik at punktene *A*, *B* og *C* ligger på en rett linje.

b) Bestem *t* slik at punktene *A*, *B* og *C* danner en trekant slik at $\angle C = 90°$.

Oppgave 5 (2 poeng)

En funksjon *f* er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 2 \\ 5 - x, & 2 < x \le 5 \end{cases}.$$

Gi funksjonen *f* en ny definisjonsmengde slik at følgende er oppfylt samtidig:

- *f* skal være kontinuerlig.
- Den nye definisjonsmengden skal være så stor som mulig.
- Verdimengden til *f* skal være uendret.

Del 2

Oppgave 1 (6 poeng)

En influensaepidemi bryter ut på en videregående skole med 1000 elever. I starten er det få smittede, men antallet øker raskt. Antallet smittede elever $S(t)$ etter t dager er tilnærmet gitt ved

$$S(t) = \frac{300}{1 + 28 \cdot e^{-0,3t}} \; .$$

a) Hvor lang tid tar det før 100 elever er smittet?

b) På hvilket tidspunkt blir flest elever smittet, og hvor raskt sprer smitten seg da?

c) Undersøk om S har asymptoter, og forklar hvilken praktisk tolkning asymptotene eventuelt har.

Oppgave 2 (6 poeng)

Avgjør om hver av påstandene nedenfor er sann eller usann. Forklar tydelig hvordan du har resonnert.

a) **Påstand:** Når $x > 0$, er $e^{k \cdot \ln(x)} = x^k$.

b) En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2, & x < 2 \\ 3x^2 - 4, & x \geq 2 \end{cases} \; .$$

Påstand: Funksjonen er deriverbar i $x = 2$.

c) **Påstand:** En funksjon som er både minkende og voksende i definisjonsmengden sin, kan ha en omvendt funksjon.

Oppgave 3 (6 poeng)

To biler, *A* og *B*, kjører på hver sin vei. Posisjonen til bil *A* er gitt ved $\vec{r_A}(t)$, og posisjonen til bil *B* er gitt ved $\vec{r_B}(t)$, der

$$\vec{r_A}(t) = \left[\frac{1}{2}(t-4), t\right] \quad \text{og} \quad \vec{r_B}(t) = \left[\frac{1}{2}t, \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{5}\right)\right].$$

Her er *t* tiden målt i minutter, og avstandene er målt i kilometer.

a) Bestem avstanden i luftlinje mellom bilene etter 1 minutt.

En av veiene er en motorvei. Den andre veien er en vei med lavere fartsgrense.

b) Gjør beregninger og argumenter for hvilken av bilene som er på motorveien.

Veiene krysser hverandre i et veikryss.

c) Gjør beregninger og argumenter for hvilken av bilene som kommer til veikrysset først.

Oppgave 4 (4 poeng)

Momentmagnitudeskalaen er en skala for å måle størrelsen på jordskjelv. Sammenhengen mellom momentmagnituden *M* og energien *E* er

$$M = \frac{2}{3}\lg(E) - 3{,}2 \ .$$

Energien *E* måles i joule (J).

a) Bestem et uttrykk for energien *E* som løses ut i et jordskjelv, uttrykt ved momentmagnituden *M*. Bruk dette uttrykket til å regne ut hvor mye energi som løses ut i et jordskjelv som måler 4,7 på momentmagnitudeskalaen.

b) Hvor mange ganger så stor er energien som løses ut i et jordskjelv, dersom *M* øker med 1?

Oppgave 5 (4 poeng)

Det har vært en stor endring i hvilken type drivstoff bilene i Norge bruker. Statistisk sentralbyrå samler inn data om dette, og tabellen viser en oversikt over typen drivstoff til registrerte personbiler i Moss i perioden 2010—2022.

a) Bruk opplysningene i tabellen til å lage modeller du mener beskriver utviklingen i drivstofftypene bensin og elektrisk («El.») t år etter 2010. Argumenter for valg av modeller.

b) Ut fra modellene du har laget, hvordan vil du vurdere veksten i drivstofftypene bensin og elektrisk i årene framover, etter 2022? Kommenter gyldigheten til modellene dine.

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Personbiler													
K-3103 Moss													
Bensin	14 185	13 592	13 246	12 944	12 578	12 367	11 472	11 079	10 516	10 323	9 706	9 210	8 705
Diesel	5 756	6 791	7 590	8 308	8 973	9 609	9 913	10 055	9 967	9 908	9 406	8 931	8 533
Parafin	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Gass	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	3	2
El.	2	14	35	111	307	557	754	1 071	1 467	2 057	2 810	4 031	5 363
Annet drivstoff	1	1	1	16	8	9	803	1 209	1 613	2 006	2 491	3 060	3 414

Fotnoter

Annet drivstoff inneholder hovedsakelig hybrid.

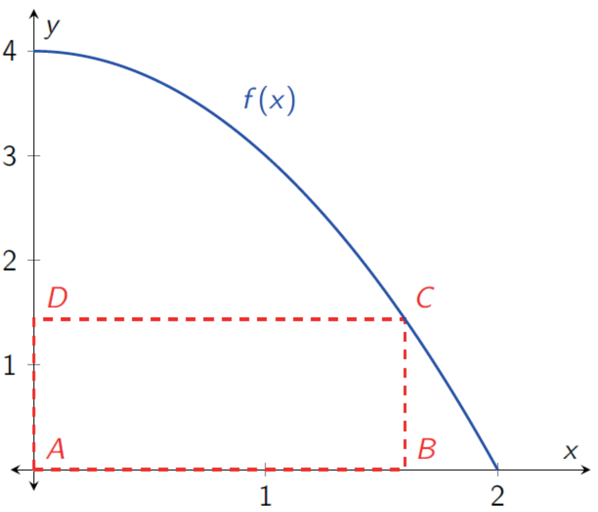
Kilde: Skjermdump av ssb.no, utdrag fra tabell 07849

Oppgave 6 (4 poeng)

En funksjon *f* er gitt ved

$$f(x) = -x^2 + 4 \,, \quad 0 \le x \le 2 \;.$$

Lars har tegnet grafen til *f* med et innskrevet rektangel *ABCD*. Lars har også skrevet et program.




```python
def f(x):
    return -x**2 + 4

def areal(x):
    return x*f(x)

h = 0.0001
def der_areal(x):
    return (areal(x + h) - areal(x))/h

x = 0
dx = 0.01
while der_areal(x + dx) > 0:
    x = x + dx

print(areal(x))
```

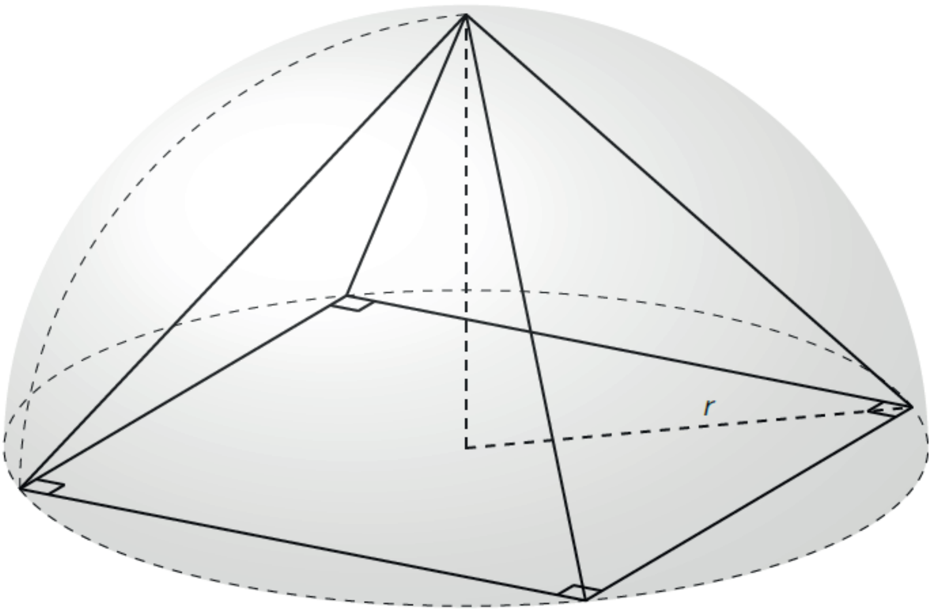
a) Forklar hva Lars prøver å finne ut med programmet. Hva blir svaret hvis man kjører programmet?

b) Hvilken strategi bruker Lars i programmet sitt? Vil strategien fungere uavhengig av hvilken funksjon *f* er?

Oppgave 7 (2 poeng)

En kule med radius r deles i to like deler. Vi skal skjære ut en pyramide med rektangulær grunnflate av den ene halvkulen. Grunnflaten skal ligge i snittflaten til halvkulen.

Bestem et uttrykk for det største volumet en slik pyramide kan ha.



Volumet av en pyramide er gitt ved

$$V = \frac{h \cdot G}{3} ,$$

der G er grunnflaten og h er høyden til pyramiden.

(Blank side)

(Blank side)

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!