DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (16 poeng)

a) Deriver funksjonene

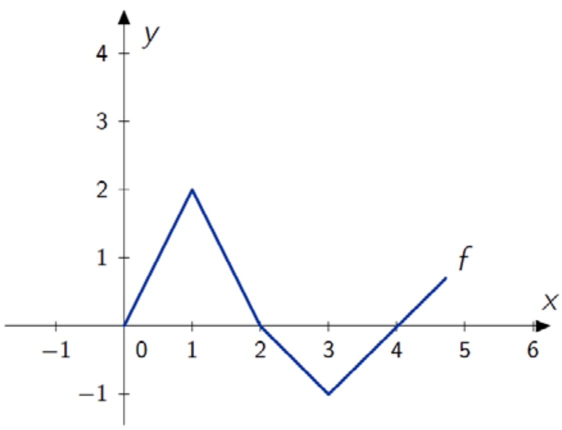
1) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

2) $g(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$

b) Bestem integralene

1) $\int \frac{x}{x^2+3}\,dx$

2) $\int_0^3 f(x)\,dx$ der figuren nedenfor viser grafen til *f*.



c) Løs differensiallikningen:

$$y' - 2y^2 = 0 \quad \text{når} \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

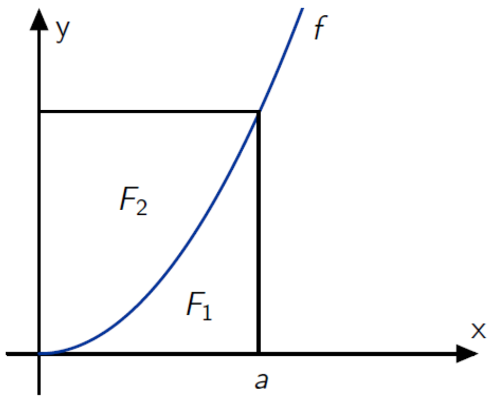
d) Gitt punktene $A(1,\,0,\,3)$, $B(3,\,2,\,4)$ og $C(5,\,3,\,0)$

1) Bestem $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ og $\left|\overrightarrow{AC}\right|$

2) Bestem $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

3) Vis at $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|^2+\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$

Oppgave 2 (8 poeng)



Vi har funksjonen $f(x)=x^2$

a) Bestem arealet F_1 avgrenset av grafen til f, førsteaksen og linjen $x=a$ der $a>0$.

Rektangelet på skissen ovenfor kan deles i to områder med arealene F_1 og F_2

b) Vis at $\dfrac{F_2}{F_1}=2$

Vi skal nå se på funksjonen $g(x)=x^n$, der n er et naturlig tall. Et tilsvarende rektangel som det ovenfor med funksjonen g kan også deles i to områder med arealene G_1 og G_2.

c) Forklar at $G_1=\dfrac{1}{n+1}\cdot a^{n+1}$

d) Bestem $\dfrac{G_2}{G_1}$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 3 (14 poeng)

a) En rekke er gitt ved

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$$

Forklar at rekken er aritmetisk, og bruk dette til å vise at $S_n = n^2$

b) Vi skal nå se på en annen rekke

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}$$

1) Finn et uttrykk for S_n.
Finn ved regning hvor mange ledd vi minst må ha med for at $S_n > 1{,}45$

2) Vi lar nå antall ledd gå mot uendelig. Bestem rekkens sum dersom den finnes.

c) Vi ser på en uendelig geometrisk rekke med variabel kvotient

$$S(x) = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \cdots$$

1) Bestem konvergensområdet til rekken. Finn et uttrykk for $S(x)$.

2) Løs likningene $S(x) = 4$ og $S(x) = -2$

d) Bevis formelen $1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{n\cdot(n+1)(n+2)}{6}$ ved induksjon.

Oppgave 4 (12 poeng)

Du skal svare på enten alternativ I eller alternativ II.
De to alternativene teller like mye ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen din inneholder deler av begge alternativene, vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ 1

Den periodiske funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2\sin x + 2\sin x \cdot \cos x\,, \quad x \in \langle 0,\, 4\pi \rangle$$

a) Tegn grafen til f. Bestem perioden.

b) Finn nullpunktene til f ved regning.

c) Vis ved regning at

$$f'(x) = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2$$

Bruk $f'(x)$ til å bestemme topp- og bunnpunkter på grafen til f.

d) Finn $f''(x)$ ved regning. Bruk $f''(x)$ til å bestemme eventuelle vendepunkter på grafen til f i intervallet $x \in \langle 0,\, 2\pi \rangle$

e) Bestem ved regning arealet av det flatestykket som er avgrenset av grafen til f, førsteaksen og linjene $x = 0$ og $x = \pi$

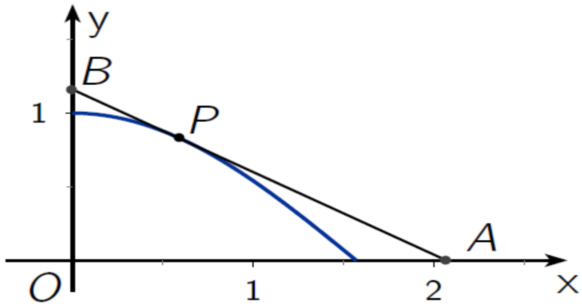
Alternativ 2

Vi har tegnet grafen til

$$f(x) = \cos x$$

og en tangent til denne i punktet $P(a, f(a))$.

Skjæringspunktene mellom tangenten og koordinataksene er A og B. Se skissen til høyre.



a) Vis at likningen for tangenten er

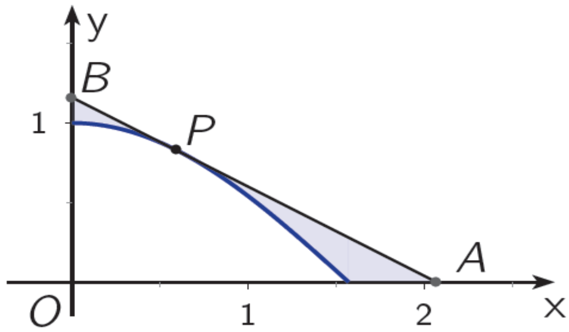
$$y = -(\sin a) \cdot x + a \cdot \sin a + \cos a$$

b) Bestem koordinatene til punktene A og B.
Vis at arealet av $\triangle OAB$ er

$$F_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}(a \cdot \sin a + \cos a) \cdot \left(a + \frac{\cos a}{\sin a}\right)$$

c) Forklar at arealet T av det fargelagte området på skissen til høyre kan skrives

$$T(a) = F_{\triangle OAB} - 1$$



d) Tegn grafen til T når $a \in \left\langle \frac{1}{5}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

e) Bestem T_{min} med tilhørende verdi av a. Finn ut hva som skjer med arealet av det fargelagte området når $a \to \frac{\pi}{2}$

Oppgave 5 (10 poeng)

I 2008 var innvandringen til Norge $1{,}4\ \%$ av folketallet y, mens utvandringen var $0{,}5\ \%$ av y. Dette året ble det født 60 000, mens antall døde var 42 000.

Vi antar at disse dataene for befolkningsendringen holder seg konstant noen år. Vi lar innbyggertallet i Norge være $y(t)$, der t er antall år etter 1. januar 2009. Det vil si at $y(0)$ er folketallet i begynnelsen av 2009, $y(1)$ er folketallet i begynnelsen av 2010, og så videre.

a) Forklar at befolkningsendringen kan beskrives ved differensiallikningen

$$y' = 0{,}009 \cdot y + 18\,000$$

b) Bestem folketallet det året befolkningen vokser med 72 000.

c) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen ved regning.

d) Folketallet i Norge 1. januar 2009 var 4 800 000. Bestem konstanten i løsningen av differensiallikningen.

e) Hvor lang tid vil det ta, ifølge modellen ovenfor, før innbyggertallet i Norge er 6 000 000?