DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 5x \cos x$

b) $g(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x}$

Oppgave 2 (3 poeng)

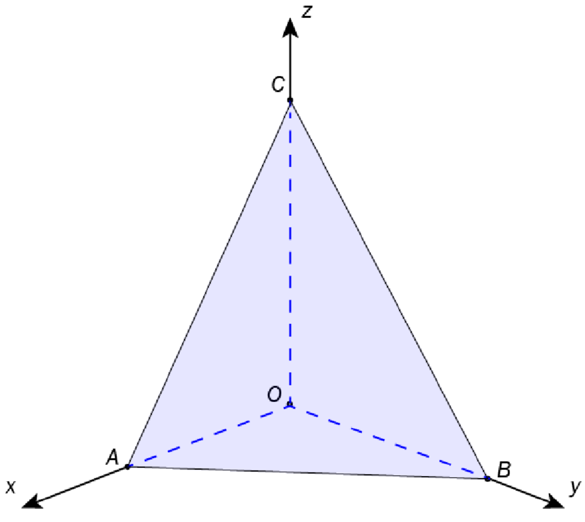
Bestem integralene

a) $\displaystyle\int_0^1 2e^{2x} dx$

b) $\displaystyle\int 2x \cdot e^x dx$

Oppgave 3 (5 poeng)

Gitt punktene $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,4)$ og $O(0,0,0)$.



a) Bestem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

b) Bestem volumet av tetraederet $ABCO$.

c) Punktene A, B og C ligger i planet α.

Vis at likningen til planet α kan skrives

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$$

Oppgave 4 (4 poeng)

a) En rekke er gitt ved

$$1+e^{-1}+e^{-2}+e^{-3}+\ldots$$

Forklar at dette er en konvergent, geometrisk rekke. Bestem summen av den uendelige rekken.

b) En geometrisk rekke er gitt ved

$$1+e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\ldots$$

Bestem konvergensområdet og summen av rekken.

Oppgave 5 (2 poeng)

Antall individer i en populasjon etter t timer kan beskrives av funksjonen $N(t)$.
Vi antar at

$$N'(t)=4t+3 \quad \text{og} \quad N(0)=800$$

Bestem antall individer i populasjonen etter 10 h.

Oppgave 6 (4 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3+\frac{5}{2}x \quad , \quad D_f=\mathbb{R}$$

a) Bestem koordinatene til eventuelle vendepunkter på grafen til f.

b) Bestem likningen for eventuelle vendetangenter på grafen til f.

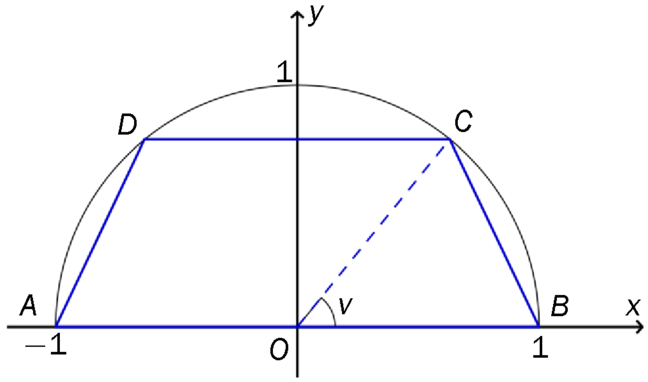
Oppgave 7 (3 poeng)

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1} \quad , \qquad n\in\mathbb{N}$$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)



Figuren ovenfor viser et trapes $ABCD$ som er innskrevet i en halvsirkel med radius 1.

a) Forklar at arealet F av trapeset er gitt ved

$$F(v) = (1 + \cos v)\sin v$$

Hvilke verdier kan v ha?

b) Bestem $\angle v$ ved regning slik at arealet av trapeset blir størst mulig.
Bestem arealet av det største trapeset.

Oppgave 2 (7 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x) \quad , \quad x \in [0, 6]$$

a) Tegn grafen til f.

b) Bruk grafen til å vise at f er en periodisk funksjon, og bestem perioden til f.

c) Vis at

$$f(x) = \sin(\pi x)(1 + 2\cos(\pi x))$$

d) Bruk uttrykket i oppgave c) til å bestemme nullpunktene til f ved regning når $x \in [0, 2]$.

Oppgave 3 (5 poeng)

Vi lar K være kapitalen i et fond t år etter første innskudd. Hvert år setter vi inn 20 000 kroner i fondet. Avkastningen i fondet er 8 % per år.

Kapitalen i fondet vokser slik differensiallikningen nedenfor viser

$$K'(t) = 0{,}08 \cdot K(t) + 20000$$

a) Løs differensiallikningen. Finn et uttrykk for $K(t)$ når $K(0) = 20\,000$.

b) Bestem størrelsen på kapitalen etter 20 år.

c) Hvor lang tid vil det gå før fondet øker med 35 000 kroner per år ifølge modellen ovenfor?

Oppgave 4 (6 poeng)

En uendelig, geometrisk rekke er gitt ved

$$S(x) = 1 + x + x^2 + \ldots$$

Når $x \in \langle -1, 1 \rangle$, er $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$

Det kan vises at $\int 1\,dx + \int x\,dx + \int x^2\,dx + \ldots = \int \dfrac{1}{1-x}\,dx$

a) Forklar at

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots = -\ln(1-x) + C$$

Begrunn at $C = 0$.

b) Sett inn $x = \dfrac{1}{2}$ og vis at $\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2^4} + \ldots = \ln 2$

Det generelle leddet i rekken ovenfor er $a_n = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{2^n}$.
Det kan vises at de åtte første desimalene i $\ln 2$ er $0{,}69314718$.

c) Dersom vi summerer de n første leddene $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ i rekken i oppgave b), får vi en tilnærmingsverdi for $\ln 2$.

Hvor mange ledd må vi minst ta med for at vi skal få 6 korrekte desimaler?

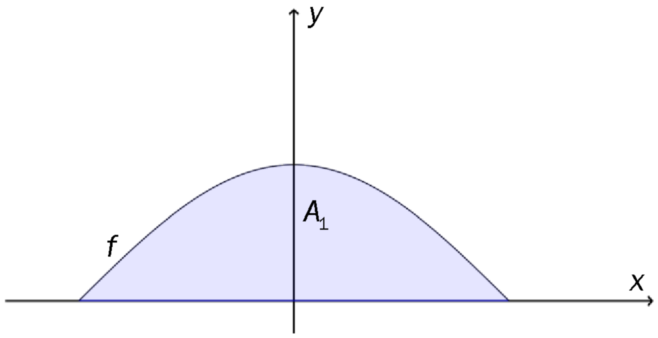
Oppgave 5 (7 poeng)

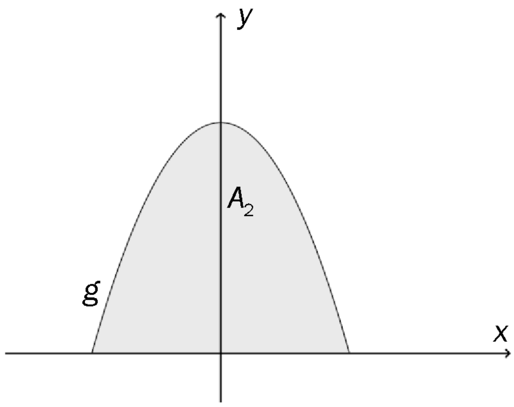
Funksjonene f og g er gitt ved

$$f(x) = \cos x$$

$$g(x) = 1 - k^2 \cdot x^2, \qquad k > 0$$

Skisser av grafene til f og g er tegnet nedenfor.





a) Bestem nullpunktene til g uttrykt ved k.

b) Bestem k slik at arealene A_1 og A_2 på figurene ovenfor er like store.

c) Bruk formelen $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$ til å vise at

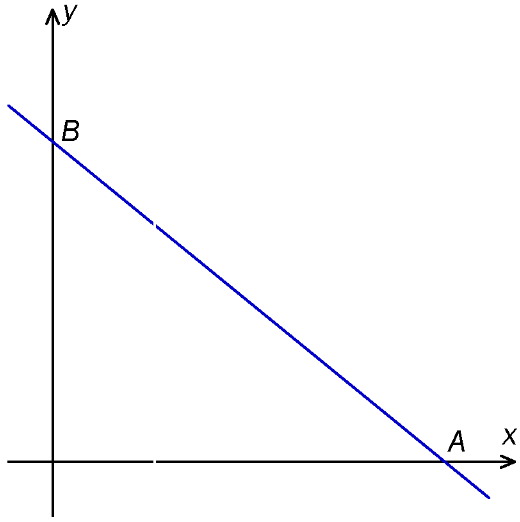
$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \qquad (*)$$

Når vi dreier flatestykket med arealet A_1 $360°$ om x-aksen, får vi et omdreiningslegeme med volum V_1.

d) Bruk formelen $(*)$ i oppgave c) til å bestemme et eksakt uttrykk for V_1 ved regning.

Oppgave 6 (7 poeng)

En rett linje i planet skjærer koordinataksene i $A(a, 0)$ og $B(0, b)$. Se skissen nedenfor.



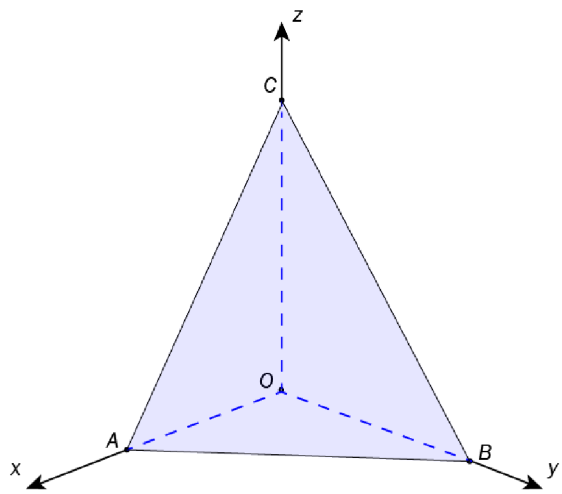
a) Vis at likningen til linjen kan skrives

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

b) Vis at dette også kan skrives

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Et plan α i rommet skjærer koordinataksene i $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ og $C(0, 0, c)$.



c) Vis at normalvektoren til planet α er

$$\vec{n} = [bc, ac, ab]$$

d) Vis at likningen til α kan skrives

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

e) Planet β skjærer x-aksen i $D(5, 0, 0)$ og y-aksen i $E(0, 4, 0)$. Planet er parallelt med z-aksen.

Forklar hvordan vi kan bruke resultatet i oppgave d) til å bestemme likningen for planet β.