DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 2\cos(3x)$

b) $g(x) = 5e^{x} \cdot \sin(2x)$

Oppgave 2 (3 poeng)

Bestem integralene

a) $\int (x^3 - 2x)\,dx$

b) $\int_1^e x \cdot \ln x \,dx$

Oppgave 3 (4 poeng)

a) Løs differensiallikningen

$$y' - 2y = 3 \quad \text{når} \quad y(0) = \frac{5}{2}$$

b) Bestem likningen til tangenten i punktet $\left(0\,,\,\frac{5}{2}\right)$ på grafen til y.

Oppgave 4 (4 poeng)

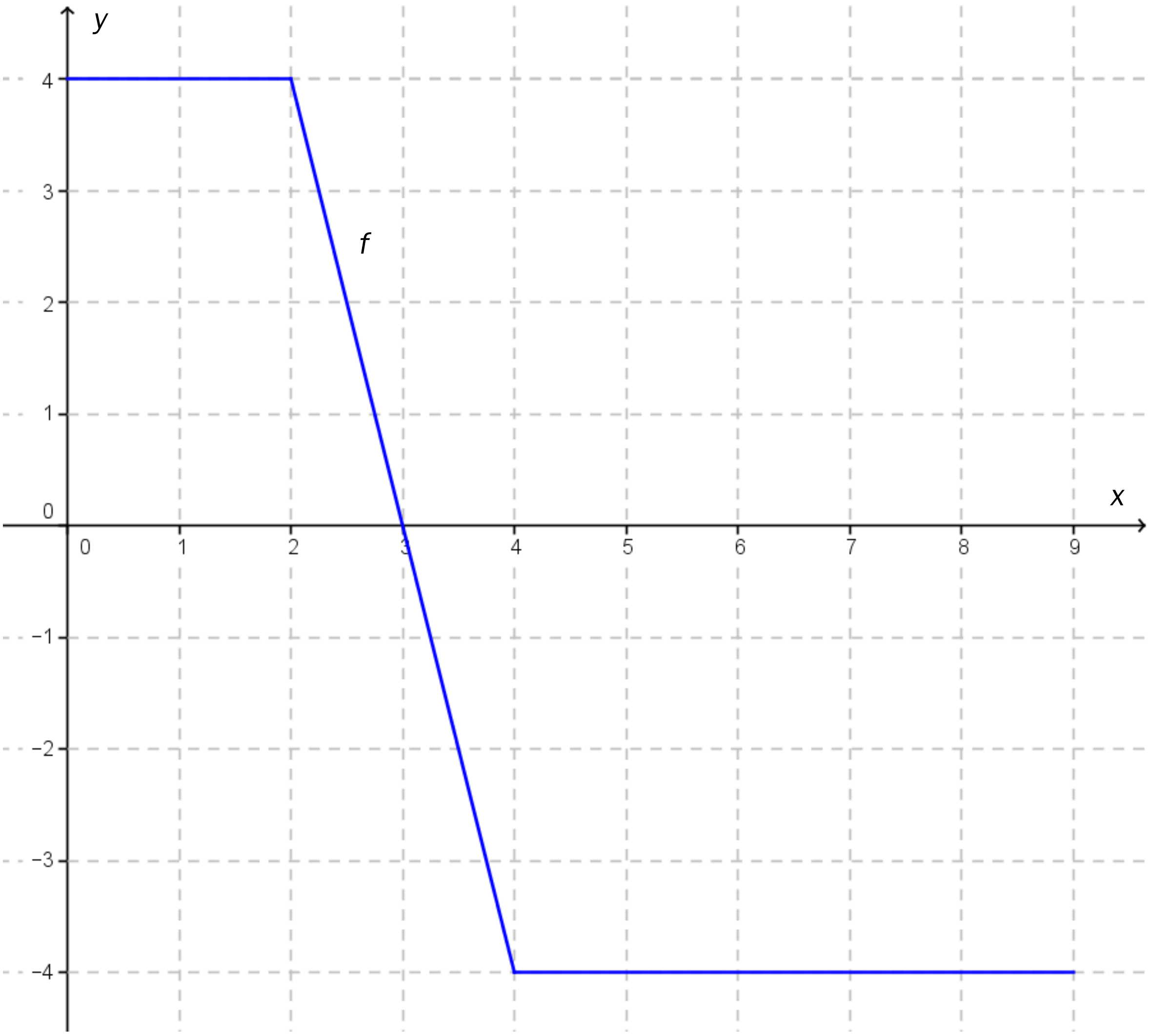
Punktene $A(0, 6, 6)$, $B(0, 0, 7)$ og $C(6, 0, 5)$ ligger i planet α.

a) Bestem likningen til α.

Et punkt P ligger på linjen gjennom punktene $O(0, 0, 0)$ og $A(0, 6, 6)$.

b) Bestem mulige koordinater til P slik at volumet av tetraederet $ABCP$ blir 42.

Oppgave 5 (4 poeng)



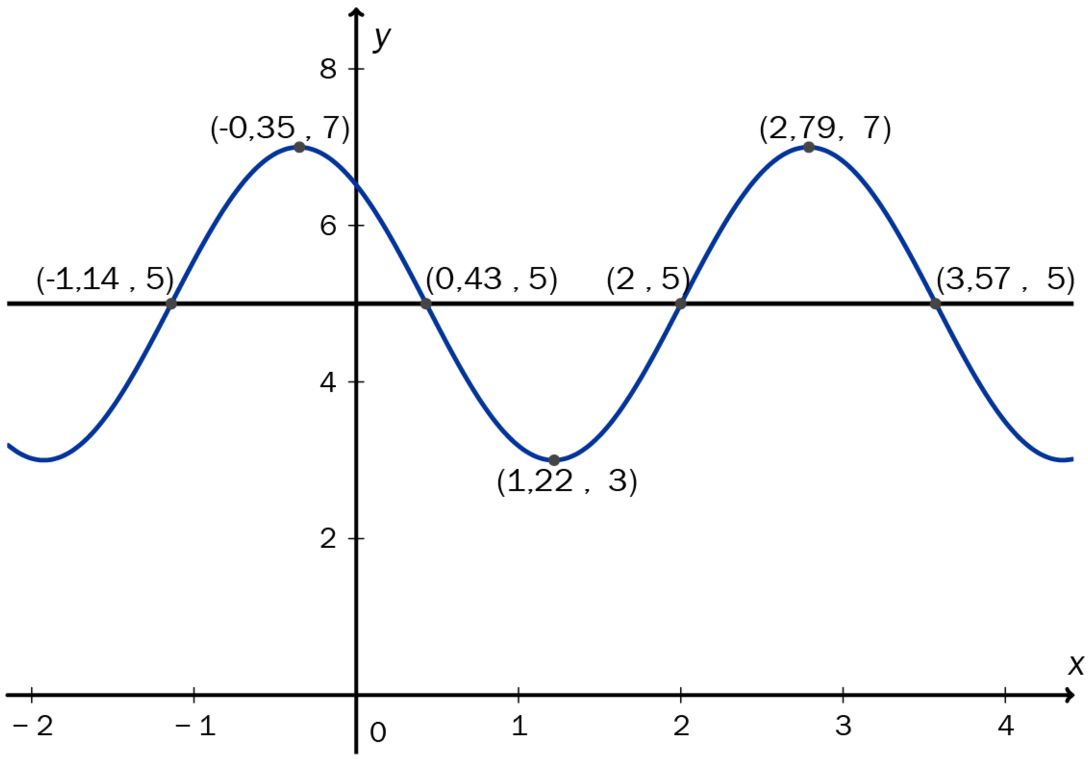
Figuren viser grafen til en funksjon $f(x)$, der $x \in [0, 9]$.

La $g(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$, der $t \in [0, 9]$

a) Bestem $g(2)$. Forklar at den største verdien til $g(t)$ er 10.

b) Bestem nullpunktet til g. Avgjør hvilke verdier av t som gjør $g(t)$ negativ.

Oppgave 6 (4 poeng)



Ovenfor ser du grafen til en funksjon $f(x) = A\sin(cx + \varphi_1) + d$.

a) Bestem A, c, d og φ_1 ved hjelp av grafen og de punktene som er markert på grafen. Skriv opp funksjonsuttrykket til $f(x)$.

b) Grafen ovenfor kan også være grafen til $g(x) = A\cos(cx + \varphi_2) + d$. Skriv opp funksjonsuttrykket til $g(x)$.

Oppgave 7 (2 poeng)

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

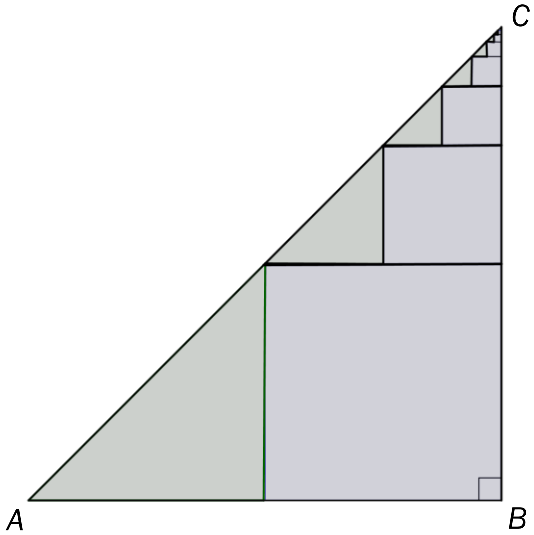
DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (8 poeng)

a) Vi har en uendelig geometrisk rekke $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ som er konvergent.
Vis at summen S av rekken kan skrives

$$S = \frac{{a_1}^2}{a_1 - a_2}$$

Figuren nedenfor viser en rettvinklet og likebeint $\triangle ABC$ der katetene har lengde 12. Inne i trekanten har vi en rekke kvadrater (markert med blått på figuren). Det største kvadratet har side 6, det nest største har side 3, slik at sidene til kvadratene blir halvert i det uendelige.



b) Forklar at summen S av arealene til kvadratene kan skrives som en uendelig geometrisk rekke. Bruk formelen i oppgave a) til å bestemme S.

c) $\triangle ABC$ inneholder også uendelig mange rettvinklete og likebeinte trekanter (markert med grønt på figuren) der sidene også halveres fra gang til gang. Skriv summen av arealene til disse trekantene som en uendelig geometrisk rekke. Bestem denne summen.

d) Forklar hvordan du kunne ha funnet de to summene i oppgave b) og oppgave c) ved hjelp av et geometrisk resonnement.

Oppgave 2 (8 poeng)

En differensiallikning er gitt ved

$$4y'' + 4y' + 5y = 0$$

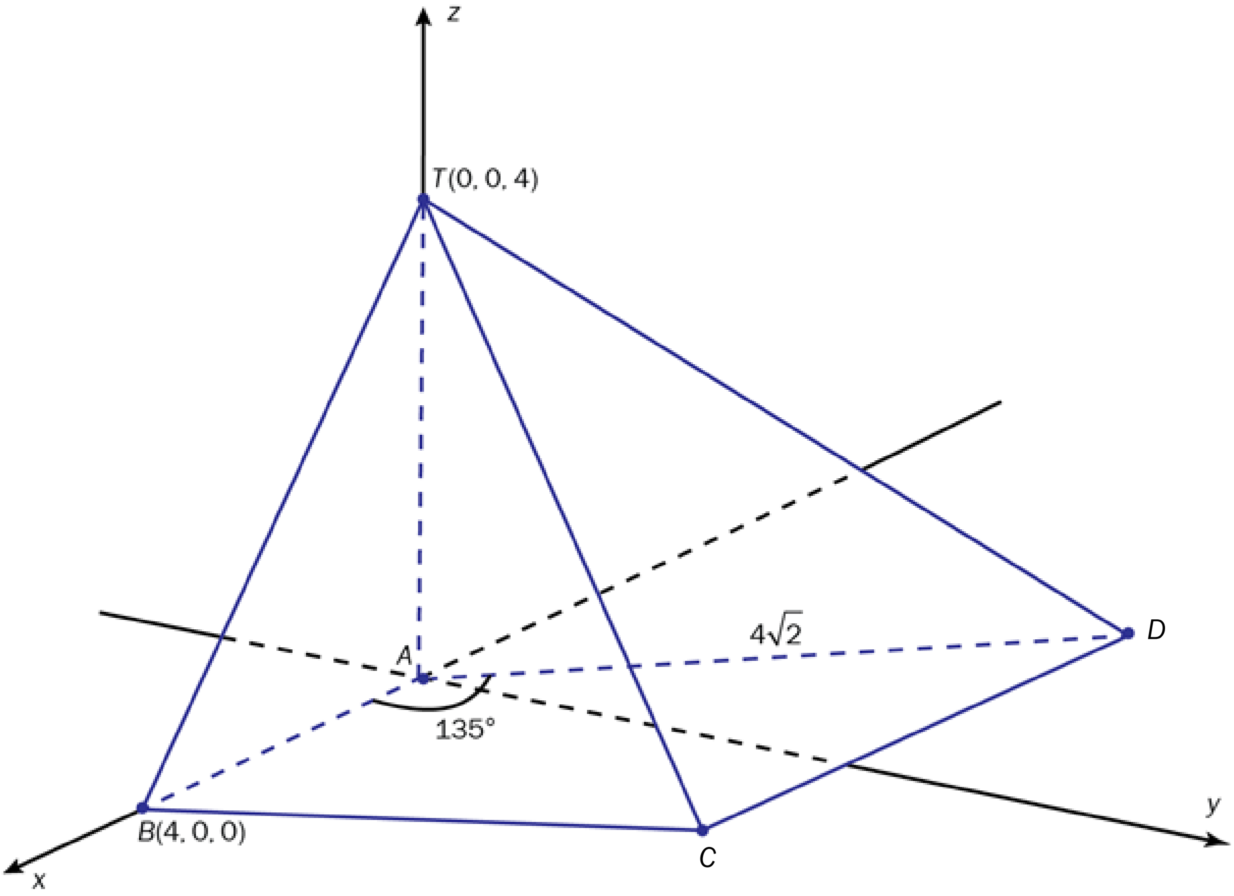
a) Sett opp den karakteristiske likningen, løs denne og bruk løsningen til å bestemme et generelt uttrykk for y.

b) Finn integrasjonskonstantene når du får vite at $y(0) = 3$ og $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$.

c) Tegn grafen til $y = f(x)$ for $x \in \left[0,\ 3\pi\right\rangle$.

d) Bestem eventuelle nullpunkter til f og koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f når $x \in \left[0,\ 3\pi\right\rangle$.

Oppgave 3 (8 poeng)



En pyramide $ABCDT$ er gitt på figuren ovenfor. Pyramiden settes inn i et tredimensjonalt koordinatsystem slik at koordinatene til A, B og T er gitt ved $A(0, 0, 0)$, $B(4, 0, 0)$ og $T(0, 0, 4)$. Punktene C og D ligger i xy-planet.

a) Vi setter $\angle BAD = 135°$ og $AD = 4\sqrt{2}$. Vis at D har koordinatene $(-4, 4, 0)$.

b) Punktet C er slik at $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Vis at C har koordinatene $(2, 4, 0)$.

Punktene B, D og T ligger i et plan α.

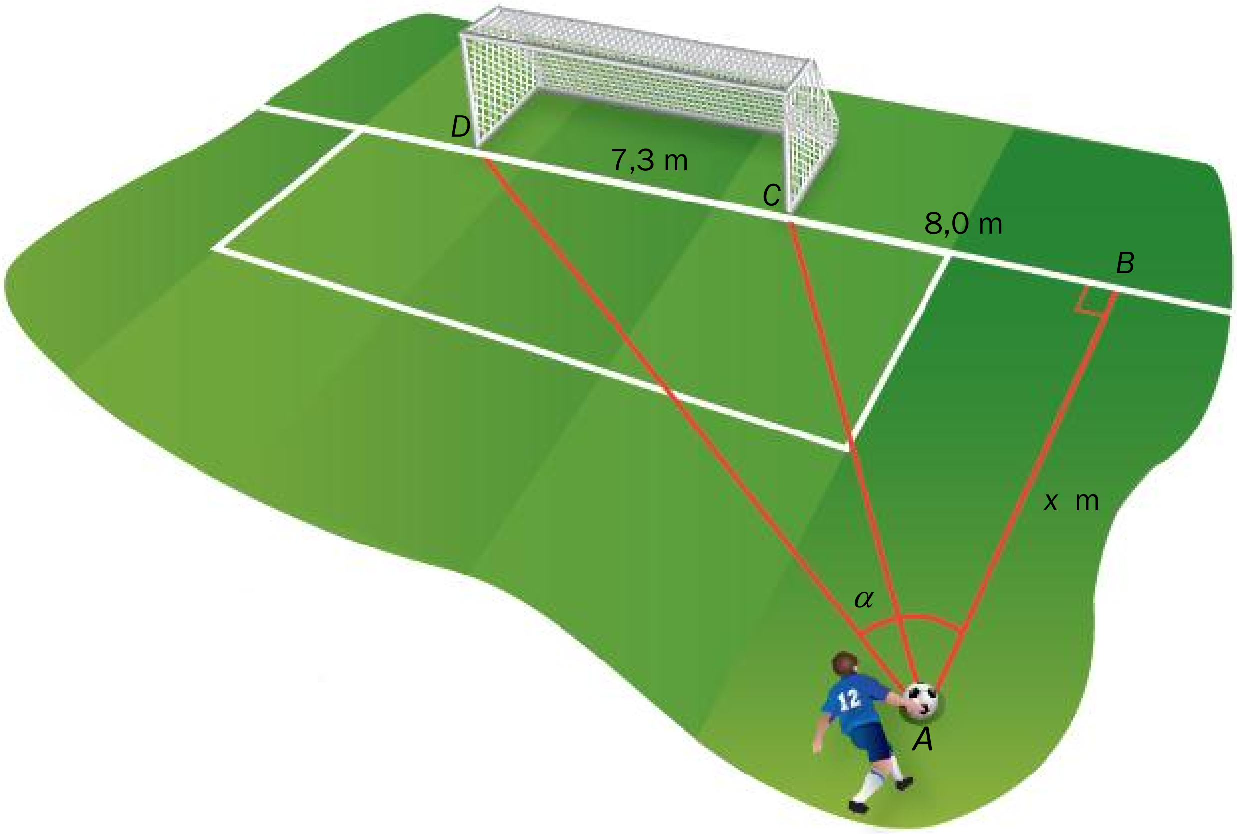
c) Vis at likningen for α er $x + 2y + z - 4 = 0$

Volumet av pyramiden $ABDT$ kalles V_1 og volumet av pyramiden $CBDT$ kalles V_2.

d) Bestem forholdet $\frac{V_1}{V_2}$.

Oppgave 4 (6 poeng)

Et fotballmål har lengde CD = 7,3 m. En fotballspiller løper med ballen langs linjestykket AB, slik figuren nedenfor viser. Punktet B ligger 8,0 m fra punktet C. Han vil skyte på mål når $\angle\alpha = \angle DAC$ er størst mulig. $\angle\alpha$ avhenger av lengden $x = AB$.



Vi setter $\angle DAB = u$ og $\angle CAB = v$ og lar $f(x) = \tan(\alpha) = \tan(u - v)$

a) Bruk formelen $\tan(u-v) = \dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v}$ til å vise at $f(x) = \dfrac{7{,}3x}{x^2 + 122{,}4}$

b) Bestem den største verdien for $f(x)$ og tilhørende verdi for x.

Vi vet at α har sin største verdi når $\tan\alpha$ har sin største verdi.

c) Bestem α_{maks}.

Oppgave 5 (6 poeng)

Et plan α er gitt ved likningen

$$2x+y-2z+3=0$$

a) Bestem likningen for den kuleflaten som har sentrum i punktet $S(11,\ 2,\ -6)$ og som har α som tangentplan.

b) Bestem koordinatene til tangeringspunktet mellom kuleflaten og planet α.

Et plan β er gitt ved

$$2x+y-2z=0$$

Dette planet skjærer kuleflaten langs en sirkel.

c) Bestem radien i denne sirkelen.