Utdannings-
direktoratet

Eksamen

19.11.2019

REA3024 Matematikk R2

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel	Del 1: Skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar (På del 1 er det ikkje tillate å bruke datamaskin.) Del 2: Alle hjelpemiddel er tillatne, bortsett frå opent Internett og andre verktøy som kan brukast til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemiddel under eksamen, har du ikkje lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måtar å utveksle informasjon med andre er ikkje tillate.
Informasjon om oppgåva	Del 1 har 10 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast.
Kjelder	Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderinga	Sjå eksamensrettleiinga med kjenneteikn på måloppnåing til sentralt gitt skriftleg eksamen. Eksamensrettleiinga finn du på Utdanningsdirektoratets nettsider

Del 1

Oppgåve 1 (3 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = 2\cos(\pi x)$

b) $g(x) = \cos^2 x \cdot \sin x$

Oppgåve 2 (6 poeng)

Bestem integrala

a) $\int_{-1}^{1} \left(2x^3 + 3x - 1\right) \mathrm{d}x$

b) $\int \frac{8x}{\sqrt{2x^2 - 1}} \mathrm{d}x$

c) $\int \frac{2}{(x+3)(x+1)} \mathrm{d}x$

Oppgåve 3 (4 poeng)

a) Bestem summen av den aritmetiske rekkja

$$7 + 11 + \cdots + 479 + 483$$

Den uendelege geometriske rekkja $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ konvergerer. Du får vite at $a_2 = 6$ og at summen av rekkja er 24.

b) Bestem a_1.

Oppgåve 4 (4 poeng)

Løys likningane

a) $2\sin(2x) = 1$, der $x \in [0, \pi]$

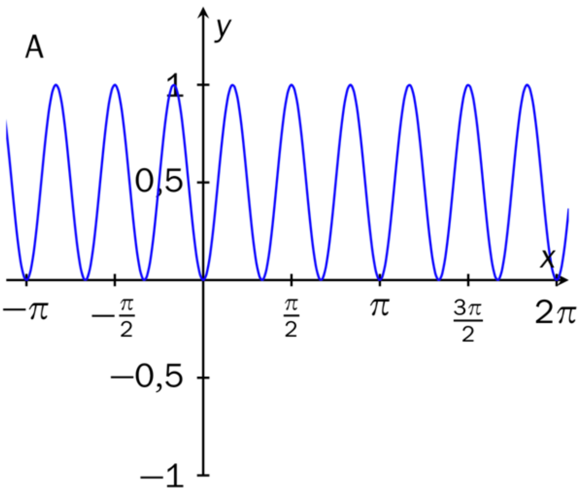
b) $2\cos^2 x - \cos x = 1$, der $x \in [0, 4\pi]$

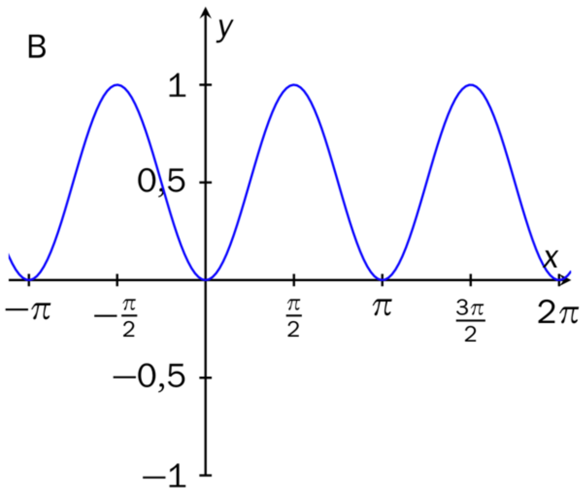
Oppgåve 5 (2 poeng)

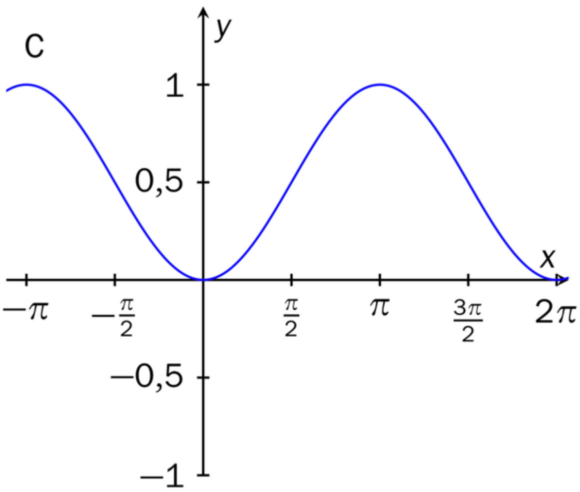
Funksjonen f er gitt ved

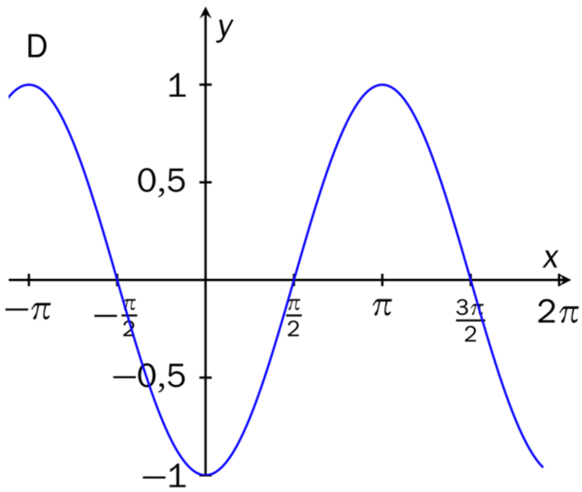
$$f(x) = \sin^2 x$$

Nedanfor ser du fire grafar. Kva for ein av desse er grafen til f ? Grunngi svaret.









Oppgåve 6 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=x+a\ ,\quad 0\le x\le 2\ ,\ a>0$$

a) Bestem a slik at arealet under grafen til f blir 3.

Grafen til f blir dreidd $360°$ om x-aksen. Vi får da ei rett avkorta kjegle.

b) Bestem a slik at volumet av den rett avkorta kjegla blir $\frac{98}{3}\pi$.

Oppgåve 7 (5 poeng)

Den rette linja ℓ er gitt ved parameterframstillinga

$$\ell:\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=6+t \end{cases}$$

a) Bestem skjeringspunktet mellom linja ℓ og xz-planet.

Linja ℓ står vinkelrett på eit plan α. Punktet $P(2,-2,6)$ ligg i planet α.

b) Bestem ei likning for planet α.

c) Bestem skjeringspunktet mellom α og ℓ.

Oppgåve 8 (4 poeng)

Vi har gitt differensiallikninga

$$y'-2y=x\ ,\ \ y(0)=1$$

a) Løys differensiallikninga.

b) Bestem likninga for tangenten til grafen til y i punktet $(0,1)$.

Oppgåve 9 (2 poeng)

Punkta $A(1,-1,0)$, $B(1,2,4)$ og $C(5,1,-4)$ er sentrum i kvar si kuleflate. Dei tre kuleflatene tangerer kvarandre.

Bestem radiusen til kvar av dei tre kulene.

Oppgåve 10 (2 poeng)

Bruk induksjon til å vise at $n^3 - n$ er deleleg med 3 for alle $n \in \mathbb{N}$.

Del 2

Oppgåve 1 (9 poeng)

Funksjonane f og g er gitt ved

$$f(x) = 2x + \sin x \;, \quad D_f = [0, 4\pi]$$

$$g(x) = 2x + 4\sin x \;, \quad D_g = [0, 4\pi]$$

a) Bruk grafteiknar til å teikne grafane til f og g i same koordinatsystem.

b) Bestem arealet under grafen til f og arealet under grafen til g.

Dersom grafen til f og grafen til g blir dreidde 360° om x-aksen, får vi to omdreiingslekamar.

c) Bestem volumet til kvart av dei to omdreiingslekamane.

Funksjonen h er gitt ved

$$h(x) = 2x + k \cdot \sin x \;, \text{ der } 0 < k < 9$$

La F vere flatestykket avgrensa av grafen til h, x-aksen og linja $x = 4\pi$.

d) Vis ved hjelp av CAS at arealet til F er uavhengig av k.

Dersom F blir dreidd 360° om x-aksen, får vi ein omdreiingslekam.

e) Bruk CAS til å bestemme kva verdi for k som gir minst volum til omdreiingslekamen.

Oppgåve 2 (4 poeng)

Vi har tre plan α, β og γ gitt ved likningane

$$\begin{aligned}
\alpha&: \quad 2x-2y-z=4 \\
\beta&: \quad 2x+y-z=-2 \\
\gamma&: \quad 3y+2z=6
\end{aligned}$$

Desse tre plana skjer kvarandre i eit punkt P.

a) Bestem koordinatane til punktet P.

Ein pyramide er avgrensa av dei tre plana saman med *xy*-planet.

b) Bestem volumet av pyramiden som er avgrensa av desse fire plana.

Oppgåve 3 (4 poeng)

Svein jobbar som lærar. I 2019 har han ei årslønn på 478 400 kroner. Han reknar med å få ein årleg lønnsauke på 4,0 % per år i åra framover.

a) Vis at den samla inntekta til Svein i åra 2020–2029 da vil bli i overkant av 5,97 millionar kroner.

Svein vurderer å vidareutdanne seg i åra 2020 og 2021. Han vil da ikkje ha nokon inntekt desse to åra. Han reknar så med å få ei årslønn på 574 000 kroner i 2022 og ein årleg lønnsauke på 4,0% kvart år etterpå.

Sjølv om han vil få høgare årslønn dersom han tek vidareutdanning, vil det ta nokre år før den samla inntekta i åra etter 2019 blir større enn om han ikkje tek vidareutdanning.

b) Bruk CAS til å bestemme kor lenge han må jobbe etter at han er ferdig med vidareutdanninga, for at den samla inntekta frå og med 2020 skal bli minst like stor som om han ikkje tek vidareutdanning.

Oppgåve 4 (7 poeng)

Når ei muffinsform fell, vil farten y (i meter per sekund) til muffinsforma x sekund etter at ho blei sleppt, tilfredsstille differensiallikninga

$$y' = 9{,}81\left(1 - \frac{y^2}{k^2}\right), \quad y(0) = 0$$

Kort tid etter at muffinsforma blei sleppt, vil ho få tilnærma konstant fart. Denne farten kallar vi muffinsforma sin terminalfart v_a.

a) Grunngi at $k^2 = {v_a}^2$.

For ein type muffinsformer vil $v_a = 1{,}8$ m/s.

b) Bruk CAS til å vise at farten y for denne typen muffinsformer er gitt ved

$$y(x) = \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{1 - e^{-10{,}9x}}{1 + e^{-10{,}9x}}\right)$$

Strekninga s muffinsforma har bevegd seg i løpet av dei t første sekunda etter at ho er sleppt, er gitt ved

$$s(t) = \int_0^t y(x)\,\mathrm{d}x$$

c) Kor lang tid vil det gå frå du slepper ei muffinsform av denne typen, til ho har falle 12 meter?

Når du slepper ein annan type muffinsform, tek det 4,7 sekund frå ho blir sleppt, til ho har falle 12 meter.

d) Bestem terminalfarten til denne typen muffinsform.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler	Del 1: Skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. (På del 1 er det ikke tillatt å bruke datamaskin.) Del 2: Alle hjelpemidler er tillatt, bortsett fra åpent Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemiddel under eksamen, har du ikke lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måter å utveksle informasjon med andre er ikke tillatt.
Informasjon om oppgaven	Del 1 har 10 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres.
Kilder	Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderingen	Se eksamensveiledningen med kjennetegn på måloppnåelse til sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på Utdanningsdirektoratets nettsider.

Del 1

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 2\cos(\pi x)$

b) $g(x) = \cos^2 x \cdot \sin x$

Oppgave 2 (6 poeng)

Bestem integralene

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(2x^3 + 3x - 1\right) \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{8x}{\sqrt{2x^2 - 1}} \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{2}{(x+3)(x+1)} \mathrm{d}x$

Oppgave 3 (4 poeng)

a) Bestem summen av den aritmetiske rekken

$$7 + 11 + \cdots + 479 + 483$$

Den uendelige geometriske rekken $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ konvergerer. Du får vite at $a_2 = 6$ og at summen av rekken er 24.

b) Bestem a_1.

Oppgave 4 (4 poeng)

Løs likningene

a) $2\sin(2x) = 1$, der $x \in [0, \pi]$

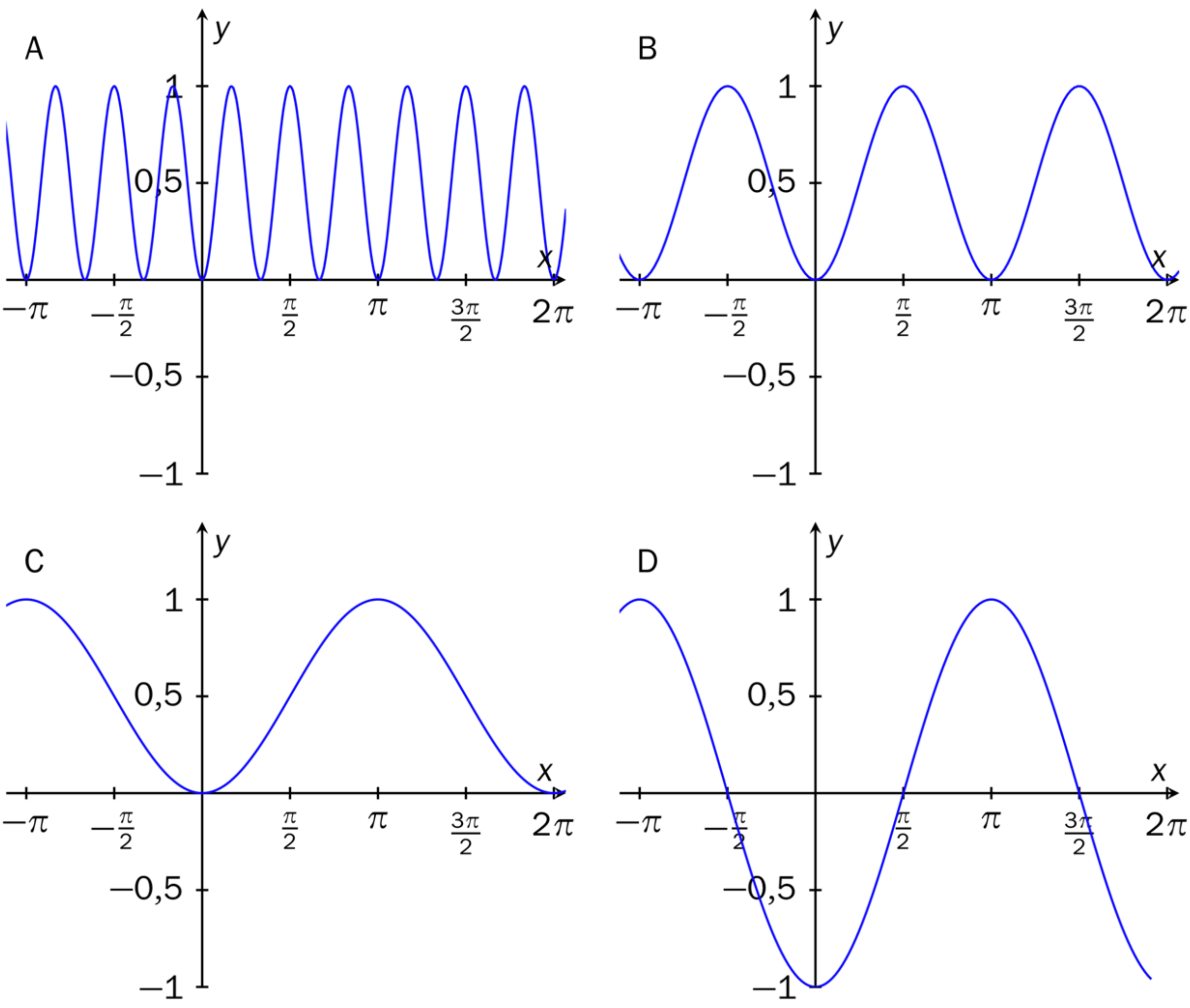
b) $2\cos^2 x - \cos x = 1$, der $x \in [0, 4\pi]$

Oppgave 5 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \sin^2 x$$

Nedenfor ser du fire grafer. Bestem hvilken av disse som er grafen til f . Begrunn svaret.



Oppgave 6 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x + a \quad , \quad 0 \le x \le 2 \ , \quad a > 0$$

a) Bestem a slik at arealet under grafen til f blir 3.

Grafen til f dreies $360°$ om x-aksen. Vi får da en rett avkortet kjegle.

b) Bestem a slik at volumet av den rett avkortede kjeglen blir $\frac{98}{3}\pi$.

Oppgave 7 (5 poeng)

Den rette linjen ℓ er gitt ved parameterframstillingen

$$\ell : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 6 + t \end{cases}$$

a) Bestem skjæringspunktet mellom linjen ℓ og xz-planet.

Linjen ℓ står vinkelrett på et plan α. Punktet $P(2, -2, 6)$ ligger i planet α.

b) Bestem en likning for planet α.

c) Bestem skjæringspunktet mellom α og ℓ.

Oppgave 8 (4 poeng)

Vi har gitt differensiallikningen

$$y' - 2y = x \ , \quad y(0) = 1$$

a) Løs differensiallikningen.

b) Bestem likningen for tangenten til grafen til y i punktet $(0, 1)$.

Oppgave 9 (2 poeng)

Punktene $A(1,-1,0)$, $B(1,2,4)$ og $C(5,1,-4)$ er sentrum i hver sin kuleflate. De tre kuleflatene tangerer hverandre.

Bestem radien til hver av de tre kulene.

Oppgave 10 (2 poeng)

Bruk induksjon til å vise at n^3-n er delelig med 3 for alle $n \in \mathbb{N}$.

Del 2

Oppgave 1 (9 poeng)

Funksjonene f og g er gitt ved

$$f(x) = 2x + \sin x \ , \quad D_f = [0, 4\pi]$$

$$g(x) = 2x + 4\sin x \ , \quad D_g = [0, 4\pi]$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafene til f og g i samme koordinatsystem.

b) Bestem arealet under grafen til f og arealet under grafen til g.

Dersom grafen til f og grafen til g dreies $360°$ om x-aksen, får vi to omdreiingslegemer.

c) Bestem volumet til hvert av de to omdreiingslegemene.

Funksjonen h er gitt ved

$$h(x) = 2x + k \cdot \sin x \ , \text{ der } 0 < k < 9$$

La F være flatestykket avgrenset av grafen til h, x-aksen og linjen $x = 4\pi$.

d) Vis ved hjelp av CAS at arealet til F er uavhengig av k.

Dersom F dreies $360°$ om x-aksen, får vi et omdreiingslegeme.

e) Bruk CAS til å bestemme hvilken verdi for k som gir minst volum til omdreiingslegemet.

Oppgave 2 (4 poeng)

Vi har tre plan α, β og γ gitt ved likningene

$$\begin{aligned} \alpha:&\quad 2x-2y-z=4 \\ \beta:&\quad 2x+y-z=-2 \\ \gamma:&\quad 3y+2z=6 \end{aligned}$$

Disse tre planene skjærer hverandre i et punkt P.

a) Bestem koordinatene til punktet P.

En pyramide er avgrenset av de tre planene sammen med *xy*-planet.

b) Bestem volumet av pyramiden som er avgrenset av disse fire planene.

Oppgave 3 (4 poeng)

Svein jobber som lærer. I 2019 har han en årslønn på 478 400 kroner. Han regner med å få en årlig lønnsøkning på 4,0 % per år i årene framover.

a) Vis at Sveins samlede inntekt i årene 2020–2029 da vil bli i overkant av 5,97 millioner kroner.

Svein vurderer å videreutdanne seg i årene 2020 og 2021. Han vil da ikke ha noen inntekt disse to årene. Han regner så med å få en årslønn på 574 000 kroner i 2022 og en årlig lønnsøkning på 4,0 % hvert år etterpå.

Selv om han vil få høyere årslønn dersom han tar videreutdanning, vil det ta noen år før den samlede inntekten i årene etter 2019 blir større enn om han ikke tar videreutdanning.

b) Bruk CAS til å bestemme hvor lenge han må jobbe etter at han er ferdig med videreutdanningen, for at den samlede inntekten fra og med 2020 skal bli minst like stor som om han ikke tar videreutdanning.

Oppgave 4 (7 poeng)

Når en muffinsform faller, vil farten y (i meter per sekund) til muffinsformen x sekunder etter at den ble sluppet, tilfredsstille differensiallikningen

$$y' = 9{,}81\left(1 - \frac{y^2}{k^2}\right), \quad y(0) = 0$$

Kort tid etter at muffinsformen ble sluppet, vil den få tilnærmet konstant fart. Denne farten kalles muffinsformens terminalfart v_a.

a) Begrunn at $k^2 = {v_a}^2$.

For en type muffinsformer vil $v_a = 1{,}8$ m/s.

b) Bruk CAS til å vise at farten y for denne typen muffinsformer er gitt ved

$$y(x) = \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{1 - e^{-10{,}9x}}{1 + e^{-10{,}9x}}\right)$$

Strekningen s muffinsformen har beveget seg i løpet av de t første sekundene etter at den er sluppet, er gitt ved

$$s(t) = \int_0^t y(x)\,\mathrm{d}x$$

c) Hvor lang tid vil det gå fra du slipper en muffinsform av denne typen, til den har falt 12 meter?

Når du slipper en annen type muffinsform, tar det 4,7 sekunder fra den slippes, til den har falt 12 meter.

d) Bestem terminalfarten til denne typen muffinsform.

Blank side

Blank side

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!