Utdanningsdirektoratet

# Eksamen

17.11.2020

REA3024 Matematikk R2

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

# Nynorsk

| Eksamensinformasjon | |
|---|---|
| **Eksamenstid** | 5 timar:<br>Del 1 skal leverast inn etter 3 timar.<br>Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar. |
| **Hjelpemiddel** | Del 1: Skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar (På Del 1 er det ikkje tillate å bruke datamaskin.)<br><br>Del 2: Alle hjelpemiddel er tillatne, bortsett frå opent Internett og andre verktøy som kan brukast til kommunikasjon.<br><br>Når du bruker nettbaserte hjelpemiddel under eksamen, har du ikkje lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måtar å utveksle informasjon med andre på er ikkje tillate. |
| **Informasjon om oppgåva** | Del 1 har 8 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver.<br><br>Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing.<br>Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga.<br><br>Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast. |
| **Kjelder** | Alle andre grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet |
| **Informasjon om vurderinga** | Sjå eksamensrettleiinga med kjenneteikn på måloppnåing til sentralt gitt skriftleg eksamen. Eksamensrettleiinga finn du på Utdanningsdirektoratets nettsider. |

# Del 1

## Oppgåve 1 (4 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = \sin(2x) + \pi$

b) $g(x) = x \cdot \cos^2 x$

## Oppgåve 2 (6 poeng)

Bestem integrala

a) $\int \left( \cos x + \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x$

b) $\int x \cdot \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x$

c) $\int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3} \, \mathrm{d}x$

## Oppgåve 3 (4 poeng)

Løys likningane

a) $\cos(2x) = \frac{1}{2} \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$

b) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1 \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$

## **Oppgåve 4** (6 poeng)

Eit plan $\alpha$ er gitt ved likninga

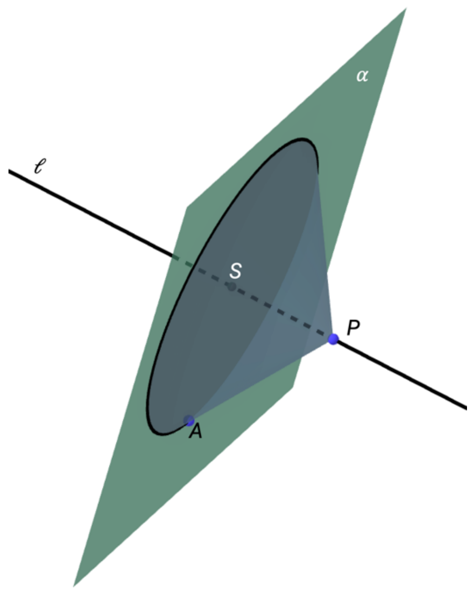
$$\alpha: \quad 2x - 3y + z = 13$$

a) Grunngi at punktet $A(4, -2, -1)$ ligg i planet $\alpha$, og at punktet $P(1, 2, 3)$ ikkje ligg i planet $\alpha$.

Ei linje $\ell$ står vinkelrett på planet $\alpha$ og går gjennom punktet $P$.

b) Bestem ei parameterframstilling for linja $\ell$, og finn skjeringspunktet $S$ mellom linja og planet $\alpha$.

I planet $\alpha$ har vi ein sirkel med sentrum i punktet $S$ og radius $SA$. Denne sirkelen er grunnflata i ei kjegle. Toppunktet i kjegla er $P$. Sjå figuren.




c) Rekn ut volumet av kjegla.

## **Oppgåve 5** (4 poeng)

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x) = a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x - b\right) + 2 \text{ , der } a > 0 \text{ og } b \in [0, 2\pi\rangle .$$

Grafen til $f$ har eit toppunkt i $(3,5)$.

a) Bestem $a$ og $b$.

b) Teikn ei skisse som viser to periodar av grafen til $f$.

## Oppgåve 6 (4 poeng)

Ei differensiallikning er gitt ved

$$y'' - 2y' + y = 0$$

a) Vis at $y = A \cdot e^x + B \cdot x \cdot e^x$ er den generelle løysinga av differensiallikninga.

b) Bestem $A$ og $B$ når du får vite at $y(0) = 3$ og $y'(0) = 5$.

## Oppgåve 7 (5 poeng)

Ei uendeleg geometrisk rekke er gitt ved

$$S(x) = 1 + \frac{3}{2}\cos x + \frac{9}{4}\cos^2 x + \cdots$$

a) Avgjer om rekka konvergerer for $x = \frac{\pi}{6}$, og for $x = \frac{\pi}{3}$.

b) Bestem summen av rekka i det eller dei tilfella i oppgåve a) der rekka konvergerer.

c) For kva verdiar av $r$ har likninga $S(x) = r$ løysing?

## Oppgåve 8 (3 poeng)

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Hugs å skrive forklarande kommentarar til beviset ditt.

# Del 2

## Oppgåve 1 (6 poeng)

Ei bedrift slepper årleg ut 5000 kg av ein gass. Dei får pålegg frå myndigheitene om at dei i løpet av 10 år må halvere dei årlege utsleppa. Bedrifta vurderer to modellar for korleis dei kan gjennomføre dette.

> **Modell 1**
> Dei reduserer forbruket med eit fast antal kg kvart år, slik at dei det første året slepper ut 5000 kg, medan dei det tiande året slepper ut 2500 kg.
>
> **Modell 2**
> Dei reduserer forbruket med ein fast årleg prosent, slik at dei det første året slepper ut 5000 kg, medan dei det tiande året slepper ut 2500 kg.

a) Kor mykje slepper bedrifta til saman ut i løpet av desse 10 åra dersom dei vel modell 1?

b) Kor mykje slepper bedrifta til saman ut i løpet av desse 10 åra dersom dei vel modell 2?

Ei anna bedrift slepper også årleg ut 5000 kg av denne gassen. Dei får beskjed av myndigheitene om at dei må redusere utsleppet. Frå og med i år og så lenge bedrifta eksisterer, får dei ikkje sleppe ut meir enn til saman 50 000 kg.

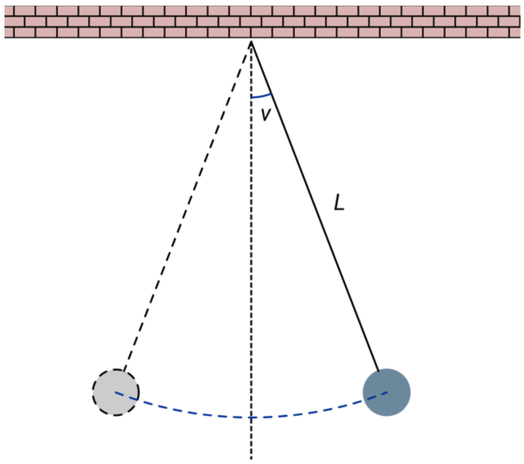
Bedrifta bestemmer seg for at dei kvart år framover vil redusere utsleppet med ein fast prosent $p$.

c) Bestem den lågaste verdien for $p$ som gjer at dei overheld krava frå myndigheitene.

## Oppgåve 2 (7 poeng)

Ei kule er festa til taket med ein tynn tråd. Kula blir trekt ut til sida og sleppt. Vi får da ein planpendel.

I ein planpendel vil vinkelutslaget $v$ radianar vere ein funksjon av tida $t$. Her er $t$ antal sekund etter at kula blir sleppt. Dersom vinkelutslaget er lite, kan vi bestemme $v(t)$ ved hjelp av differensiallikninga




$$v'' = -\frac{g}{L} \cdot v$$

Her er $g = 9{,}81$ tyngdeakselerasjonen (målt i m/s$^2$) og $L$ lengda av pendelen (målt i meter).

Arne har ein planpendel der $L = 0{,}20$ m. Han drar kula til den eine sida slik at $v = 0{,}15$, og slepper. Kula er i ro idet ho blir sleppt.

a) Forklar at beskrivinga gir oss desse vilkåra:

$$v(0) = 0{,}15$$
$$v'(0) = 0$$

b) Bestem eit uttrykk for $v(t)$.

Tida det tar frå kula blir sleppt, til ho er tilbake i same posisjon, kallar vi svingetida til pendelen.

c) Bestem svingetida til denne planpendelen.

Ein sekundpendel er ein planpendel som har ei svingetid på $2{,}0$ sekund.

d) Bestem lengda $L$ til sekundpendelen.

## **Oppgåve 3** (4 poeng)

Eit plan $\alpha$ er gitt ved likninga

$$\alpha: \ 2x - 3y + 7z = 5$$

Ei kuleflate har sentrum i $S(8, 5, 0)$ og tangerer planet $\alpha$.

a) Bestem radiusen til kuleflata.

Eit plan $\beta$ går gjennom punkta $A(1, 2, -5)$, $B(5, -2, 1)$ og $C(t, 1, 4)$. Ei kuleflate har sentrum i $T(7, 6, -3)$ og radius $r = 2$.

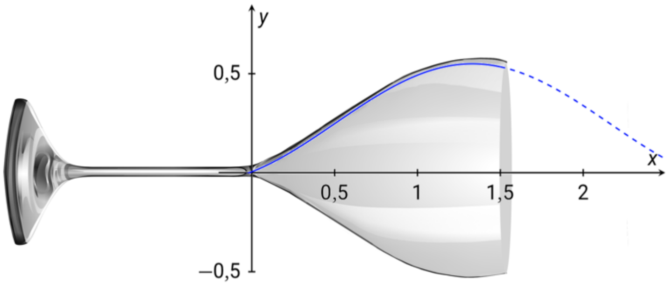
b) Bestem eksakte verdiar for $t$ slik at planet $\beta$ tangerer kuleflata.

## **Oppgåve 4** (7 poeng)

Innsideflata av ein type stettglas kjem fram når funksjonen $f$ gitt ved

$$f(x) = -0{,}3 \cdot \sin(1{,}9x - 4{,}1) + 0{,}25 \quad , \quad x \in [0,\ 1{,}5]$$

blir rotert $360°$ grader om $x$-aksen. Her er $x$ målt i dm.

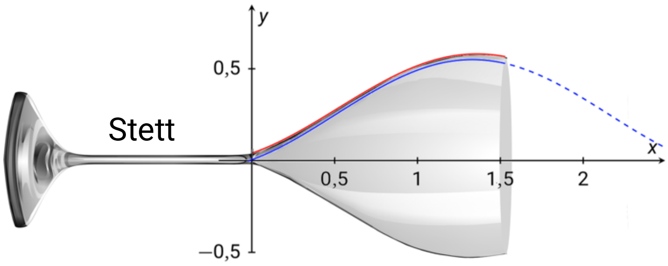



a) Kor mykje vatn er det plass til i glaset dersom det blir fylt heilt opp?

Stettglaset er laga av 3 mm tjukt glas. Dersom funksjonen $g$ gitt ved

$$g(x) = f(x) + 0{,}03$$

blir rotert $360°$ om $x$ – aksen, får vi ei tilnærming av ytterflata til glaset.




b) Bestem volumet til materialet som stettglaset (utan stett) er laga av.

c) Bruk svaret i b) til å bestemme ein tilnærma verdi for overflatearealet til utsida av stettglaset (utan stett).

I ei matematikkbok finn vi denne setninga:

Gå ut frå at ein funksjon $f$ er kontinuerleg og deriverbar i eit intervall $[a, b]$, og $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a, b]$. Overflatearealet til omdreiingslekamen vi får når vi roterer grafen til $f$ om $x$-aksen mellom $x = a$ og $x = b$, er da gitt ved formelen

$$O = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

d) Bruk setninga til å bestemme overflatearealet av utsida av stettglaset (utan stett).

# Bokmål

| Eksamensinformasjon | |
|---|---|
| **Eksamenstid** | 5 timer:<br>Del 1 skal leveres inn etter 3 timer.<br>Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer. |
| **Hjelpemidler** | Del 1: Skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. (På Del 1 er det ikke tillatt å bruke datamaskin.)<br><br>Del 2: Alle hjelpemidler er tillatt, bortsett fra åpent Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon.<br><br>Når du bruker nettbaserte hjelpemidler under eksamen, har du ikke lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måter å utveksle informasjon med andre på er ikke tillatt. |
| **Informasjon om oppgaven** | Del 1 har 8 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver.<br><br>Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen.<br><br>Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres. |
| **Kilder** | — Alle andre grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet |
| **Informasjon om vurderingen** | Se eksamensveiledningen med kjennetegn på måloppnåelse til sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på Utdanningsdirektoratets nettsider. |

# Del 1

## Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = \sin(2x) + \pi$

b) $g(x) = x \cdot \cos^2 x$

## Oppgave 2 (6 poeng)

Bestem integralene

a) $\int \left( \cos x + \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x$

b) $\int x \cdot \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x$

c) $\int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3} \, \mathrm{d}x$

## Oppgave 3 (4 poeng)

Løs likningene

a) $\cos(2x) = \frac{1}{2} \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$

b) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1 \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$

## Oppgave 4 (6 poeng)

Et plan $\alpha$ er gitt ved likningen

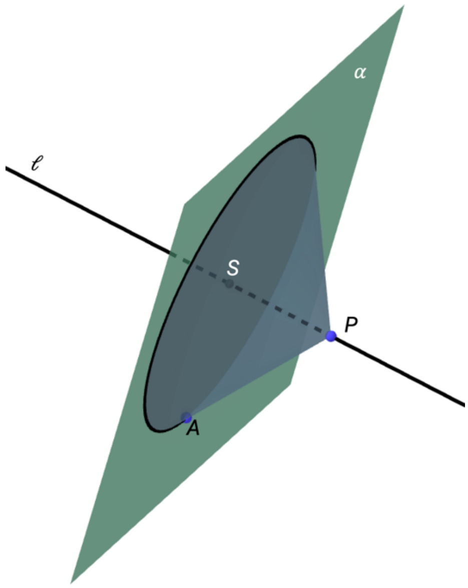
$$\alpha: \quad 2x - 3y + z = 13$$

a) Begrunn at punktet $A(4,-2,-1)$ ligger i planet $\alpha$, og at punktet $P(1,2,3)$ ikke ligger i planet $\alpha$.

En linje $\ell$ står vinkelrett på planet $\alpha$ og går gjennom punktet $P$.

b) Bestem en parameterframstilling for linjen $\ell$, og finn skjæringspunktet $S$ mellom linjen og planet $\alpha$.

I planet $\alpha$ har vi en sirkel med sentrum i punktet $S$ og radius $SA$. Denne sirkelen er grunnflaten i en kjegle. Toppunktet i kjeglen er $P$. Se figuren.




c) Regn ut volumet av kjeglen.

## Oppgave 5 (4 poeng)

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x) = a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x - b\right) + 2 \text{ , der } a > 0 \text{ og } b \in [0, 2\pi\rangle.$$

Grafen til $f$ har et toppunkt i $(3,5)$.

a) Bestem $a$ og $b$.

b) Tegn en skisse som viser to perioder av grafen til $f$.

## Oppgave 6 (4 poeng)

En differensiallikning er gitt ved

$$y'' - 2y' + y = 0$$

a) Vis at $y = A \cdot e^x + B \cdot x \cdot e^x$ er den generelle løsningen av differensiallikningen.

b) Bestem $A$ og $B$ når du får vite at $y(0) = 3$ og $y'(0) = 5$.

## Oppgave 7 (5 poeng)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$S(x) = 1 + \frac{3}{2}\cos x + \frac{9}{4}\cos^2 x + \cdots$$

a) Avgjør om rekken konvergerer for $x = \frac{\pi}{6}$, og for $x = \frac{\pi}{3}$.

b) Bestem summen av rekken i det eller de tilfellene i oppgave a) der rekken konvergerer.

c) For hvilke verdier av $r$ har likningen $S(x) = r$ løsning?

## Oppgave 8 (3 poeng)

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Husk å skrive forklarende kommentarer til beviset ditt.

# Del 2

## Oppgave 1 (6 poeng)

En bedrift slipper årlig ut 5000 kg av en gass. De får pålegg fra myndighetene om at de i løpet av 10 år må halvere de årlige utslippene. Bedriften vurderer to modeller for hvordan de kan gjennomføre dette.

> **Modell 1**
> De reduserer forbruket med et fast antall kg hvert år, slik at de det første året slipper ut 5000 kg, mens de det tiende året slipper ut 2500 kg.
>
> **Modell 2**
> De reduserer forbruket med en fast årlig prosent, slik at de det første året slipper ut 5000 kg, mens de det tiende året slipper ut 2500 kg.

a) Hvor mye slipper bedriften til sammen ut i løpet av disse 10 årene dersom de velger modell 1?

b) Hvor mye slipper bedriften til sammen ut i løpet av disse 10 årene dersom de velger modell 2?

En annen bedrift slipper også årlig ut 5000 kg av denne gassen. De får beskjed av myndighetene om at de må redusere utslippet. Fra og med i år og så lenge bedriften eksisterer, får de ikke slippe ut mer enn til sammen 50 000 kg.

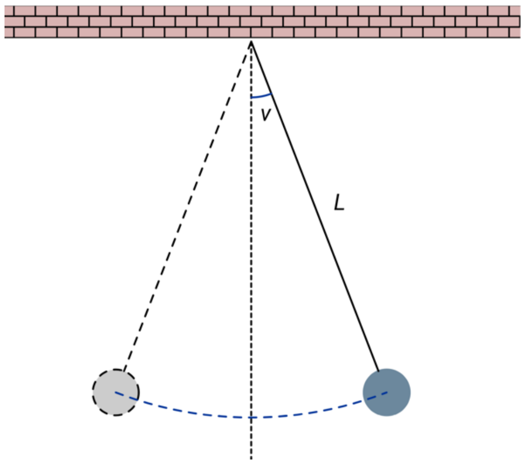
Bedriften bestemmer seg for at de hvert år fremover vil redusere utslippet med en fast prosent $p$.

c) Bestem den laveste verdien for $p$ som gjør at de overholder myndighetenes krav.

## Oppgave 2 (7 poeng)

En kule er festet til taket med en tynn tråd. Kulen trekkes ut til siden og slippes. Vi får da en planpendel.

I en planpendel vil vinkelutslaget $v$ radianer være en funksjon av tiden $t$. Her er $t$ antall sekunder etter at kulen slippes. Dersom vinkelutslaget er lite, kan vi bestemme $v(t)$ ved hjelp av differensiallikningen




$$v'' = -\frac{g}{L} \cdot v$$

Her er $g = 9{,}81$ tyngdeakselerasjonen (målt i m/s$^2$) og $L$ lengden av pendelen (målt i meter).

Arne har en planpendel der $L = 0{,}20$ m. Han drar kulen til den ene siden slik at $v = 0{,}15$, og slipper. Kulen er i ro idet den blir sluppet.

a) Forklar at beskrivelsen gir oss følgende betingelser:

$$v(0) = 0{,}15$$
$$v'(0) = 0$$

b) Bestem et uttrykk for $v(t)$.

Tiden det tar fra kulen slippes, til den er tilbake i samme posisjon, kalles pendelens svingetid.

c) Bestem svingetiden til denne planpendelen.

En sekundpendel er en planpendel som har en svingetid på $2{,}0$ sekunder.

d) Bestem lengden $L$ til sekundpendelen.

## Oppgave 3 (4 poeng)

Et plan $\alpha$ er gitt ved likningen

$$\alpha: \quad 2x - 3y + 7z = 5$$

En kuleflate har sentrum i $S(8, 5, 0)$ og tangerer planet $\alpha$.

a) Bestem radiusen til kuleflaten.

Et plan $\beta$ går gjennom punktene $A(1,\ 2, -5)$, $B(5,-2,1)$ og $C(t\ ,1,\ 4)$. En kuleflate har sentrum i $T(7, 6, -3)$ og radius $r = 2$.

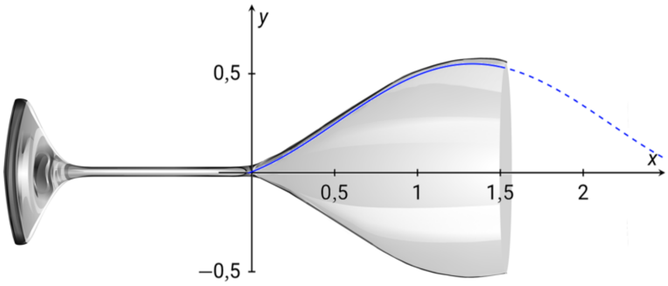
b) Bestem eksakte verdier for $t$ slik at planet $\beta$ tangerer kuleflaten.

## **Oppgave 4** (7 poeng)

Innsideflaten av en type stettglass framkommer når funksjonen $f$ gitt ved

$$f(x) = -0{,}3 \cdot \sin(1{,}9x - 4{,}1) + 0{,}25 \quad , \quad x \in [0,\ 1{,}5]$$

roteres $360°$ grader om $x$-aksen. Her er $x$ målt i dm.

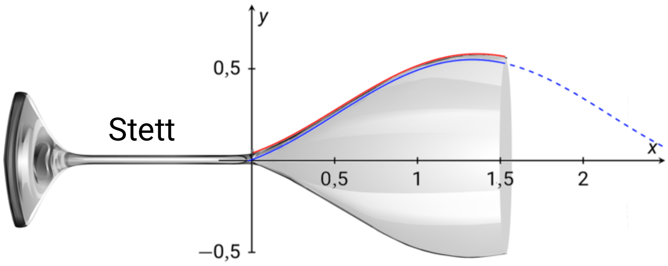



a) Hvor mye vann er det plass til i glasset om det fylles helt opp?

Stettglasset er laget av 3 mm tykt glass. Dersom funksjonen $g$ gitt ved

$$g(x) = f(x) + 0{,}03$$

roteres $360°$ om $x-$aksen, får vi en tilnærming av ytterflaten til glasset.




b) Bestem volumet til materialet som stettglasset (uten stett) er laget av.

c) Bruk svaret i b) til å bestemme en tilnærmet verdi for overflatearealet til utsiden av stettglasset (uten stett).

I en matematikkbok finner vi denne setningen:

Anta at en funksjon $f$ er kontinuerlig og deriverbar i et intervall $[a, b]$, og $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a, b]$. Overflatearealet til omdreiingslegemet vi får når vi roterer grafen til $f$ om $x$-aksen mellom $x = a$ og $x = b$, er da gitt ved formelen

$$O = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

d) Bruk setningen til å bestemme overflatearealet av utsiden av stettglasset (uten stett).

BLANK SIDE

BLANK SIDE

Utdannings-
direktoratet

## TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

**Lykke til!**

## TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

**Lykke til!**