

# Eksamen

20.11.2024 | REA3058 Matematikk R2



Se eksamenstips på baksiden!

# Nynorsk

<b>Eksamensinformasjon</b>	
<b>Eksamenstid</b>	Eksamen varer i 5 timar. Delen utan og delen med hjelpemiddel skal delast ut samstundes. Delen utan hjelpemiddel skal leverast etter 2 timar. Etter 2 timar kan kandidaten bruke hjelpemiddel. Delen med hjelpemiddel skal leverast innan 5 timar.
<b>Del utan hjelpemiddel</b>	Vanlege skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar.
<b>Del med hjelpemiddel</b>	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av internett og andre verktøy som kan brukast til kommunikasjon.
<b>Framgangsmåte</b>	Delen utan hjelpemiddel har 5 oppgåver. Delen med hjelpemiddel har 6 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Dersom oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, kan ein alternativ metode gi noko utteljing. Bruk av digitale verktøy skal dokumenterast.
<b>Rettleiing om vurderinga</b>	Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du <ul style="list-style-type: none"><li>– viser rekneferdigheiter og matematisk forståing</li><li>– gjennomfører logiske resonnement</li><li>– ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar</li><li>– kan bruke hensiktsmessige hjelpemiddel</li><li>– forklarar framgangsmåtar og grunngir svar</li><li>– skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar</li><li>– vurderer om svar er rimelege</li></ul>
<b>Andre opplysningar</b>	Teikningar og grafiske framstillingar: Utdanningsdirektoratet

## Del 1

### Oppgave 1 (6 poeng)

a) Rekn ut integralet

$$\int x^2 \cdot \ln x \, dx$$

b) Bestem  $x$  når  $\int_0^x \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) dt = 0$  og  $x \in \langle 0, \pi \rangle$ .

c) Gi ei praktisk tolking av svaret i oppgave b).

### Oppgave 2 (6 poeng)

a) Finn summen av den aritmetiske rekkja  $3 + 7 + 11 + 15 + \dots + 399$ .

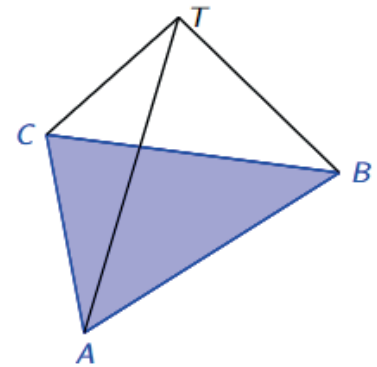
b) Bestem kvotienten  $k$  for ei uendeleg geometrisk rekkje som konvergerer og som har  $a_1 = 12$  og sum = 18.

c) Vis at talet  $0,75757575\dots$  kan skrivast som ei uendeleg geometrisk rekkje.

Bruk dette til å vise at  $1,75757575\dots = \frac{58}{33}$ .

### Oppgave 3 (4 poeng)

Eit telt står i ei plan skråning. Teltet har tre rette teltstenger som er plasserte i punkta  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(3, 1, 2)$  og  $C(-1, 3, 1)$ . Dei tre teltstengene er samla i toppunktet  $T$ .



a) Bestem arealet av botnen i teltet.

Lengda av teltstonga frå punkt  $C$  til punkt  $T$  er  $\sqrt{17}$ . Teltstonga frå punkt  $A$  til punkt  $T$  følgjer linja  $\ell$ , gitt ved

$$\ell: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$$

b) Bestem koordinatane til toppunktet  $T$ .

### Oppgave 4 (4 poeng)

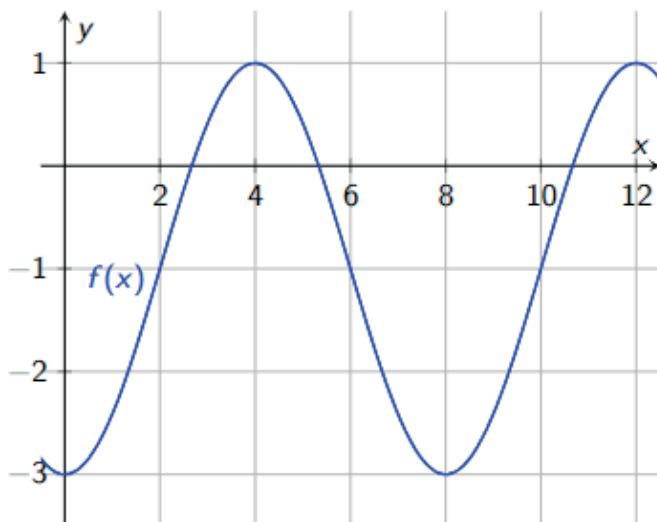
a) Kva er definisjonen av det absolute vinkelmålet (radianen) til ein vinkel? Kor mange radianar er  $80^\circ$ ?

b) Finn dei eksakte verdiane til  $\cos v$  og  $\tan v$  når  $\sin v = -\frac{1}{4}$  og  $v \in \left[ \pi, \frac{3\pi}{2} \right]$ .

## Oppgave 5 (4 poeng)

Figuren viser grafen til funksjonen

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$$



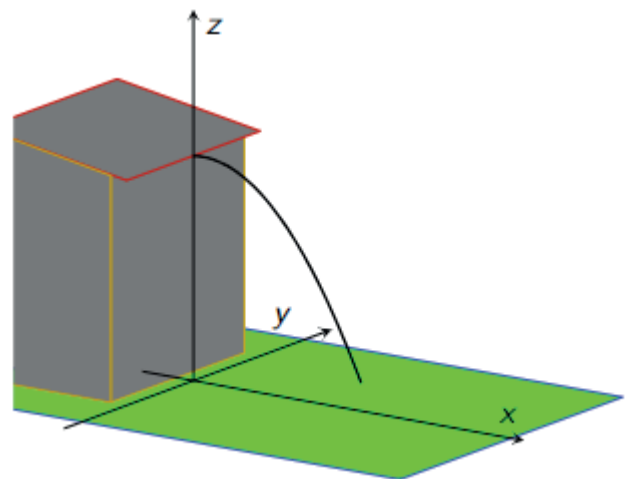
- a) Bestem ein funksjon på forma  $g(x) = A \cdot \cos(cx + \varphi) + d$ , som passar til grafen.
- b) Løys likninga  $\cos\left(\frac{\pi}{4}x - \pi\right) = \frac{1}{2}$ , der  $x \in [0, 3\pi]$ . Forklar kvar på figuren løysingane ligg.

## Del 2

### Oppgave 1 (6 poeng)

Ein ball rullar av taket på eit hus og ned på bakken. Vi plasserer eit koordinatsystem slik at

- $y$ -aksen ligg på bakken parallelt med husveggen
- $x$ -aksen ligg på bakken, står vinkelrett på husveggen og skjer  $y$ -aksen der ballen forlèt hustaket
- $z$ -aksen angir høgda over bakken med positiv retning oppover



Måleininga på aksane er meter.

Posisjonen til ballen er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [2t, 4t, 6 - 0.7t - 4.9t^2]$$

der  $t$  er antal sekund etter at ballen forlèt taket.

- a) Kor høgt over bakken er kanten på taket?  
Kva er posisjonen til ballen etter 0,5 s?
- b) Bestem farten til ballen når han treffer bakken.
- c) Ved kva for eit tidspunkt er farten til ballen 10 m/s?

## Oppgave 2 (6 poeng)

Avgjer om kvar enkelt påstand nedanfor er sann eller usann. Forklar tydeleg korleis du har resonnert.

a) **Påstand:** Likninga til eit plan kan alltid bestemast av 3 punkt i planet.

b) Ei uendeleg geometrisk rekkje er gitt ved  $1 + (\ln x - 1) + (\ln x - 1)^2 + \dots$ .

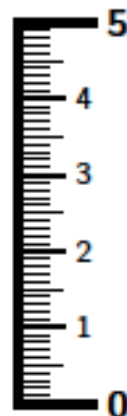
**Påstand:** Dersom  $x = \frac{1}{e}$  vil summen av rekkja vere  $\frac{1}{3}$ .

c) To funksjonar er gitt ved  $f(x) = x^3 - x^2 - ax$ , der  $a \in \mathbb{R}$ , og  $g(x) = -x^2 + x$ .

**Påstand:** Grafane til  $f$  og  $g$  avgrensar to område som er like store når  $a > -1$ .

## Oppgave 3 (2 poeng)

Biletet viser tverrsnittet av eit jordbær i målestokk 1:1. Bruk integrasjon og omdreiingslekam til å berekne volumet av heile jordbæret. Kommenter forma på omdreiingslekamen din og vurder svaret.



### Oppgave 4 (6 poeng)

Anders og Ivana har kjøpt seg russebil. Dei skal køyre bilen til ein garasje, men på turen byrjar motoren å fuske. Farten  $v$  følgjer funksjonen

$$v(t) = -6 \sin\left(360t - \frac{\pi}{2}\right) + 54$$

Her er  $v$  gitt i km/t, og  $t$  er antal timar etter at motoren har byrja å fuske.

- Bestem det første tidspunktet gjennomsnittsfarten blir 54 km/t.
- På kva for tidspunkt har bilen størst akselerasjon når han køyrer med farten  $v$ ? Kor stor er denne akselerasjonen?

Når bilen byrjar å fuske, er det 2 km til garasjen som bilen skal parkerast i.

- Kor lenge må Anders og Ivana køyre for å komme til garasjen, når bilen køyrer med farten  $v$ ?

### Oppgave 5 (4 poeng)

- Bestem ein rekursiv formel for talfølgja 1, 2, 6, 15, 31, 56, ....
- Bruk den rekursive formelen du fann i oppgave a), og lag eit program som reknar ut summen av dei 30 første ledda i talfølgja.

Hugs å leggje ved bilete av både koden og resultatet av køyringa.

### Oppgave 6 (2 poeng)

Ein sirkel har sentrum i  $S(a, 0)$  og har radius  $R < a$ . Sirkelen blir rotert om  $y$ -aksen.

Vis at volumet av omdreiingslekamen blir  $2\pi^2 R^2 a$ .



## Bokmål

<b>Eksamensinformasjon</b>	
<b>Eksamenstid</b>	Eksamen varer i 5 timer. Delen uten og delen med hjelpemidler skal deles ut samtidig. Delen uten hjelpemidler skal leveres etter 2 timer. Etter 2 timer kan kandidaten bruke hjelpemidler. Delen med hjelpemidler skal leveres innen 5 timer.
<b>Del uten hjelpemidler</b>	Vanlige skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler.
<b>Del med hjelpemidler</b>	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon.
<b>Framgangsmåte</b>	Delen uten hjelpemidler har 5 oppgaver. Delen med hjelpemidler har 6 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi noe uttelling. Bruk av digitale verktøy skal dokumenteres.
<b>Veiledning om vurderingen</b>	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du <ul style="list-style-type: none"><li>– viser regneferdigheter og matematisk forståelse</li><li>– gjennomfører logiske resonnementer</li><li>– ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner</li><li>– kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler</li><li>– forklarer framgangsmåter og begrunner svar</li><li>– skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger</li><li>– vurderer om svar er rimelige</li></ul>
<b>Andre opplysninger</b>	Tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

## Del 1

### Oppgave 1 (6 poeng)

a) Regn ut integralet

$$\int x^2 \cdot \ln x dx$$

b) Bestem  $x$  når  $\int_0^x \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) dt = 0$  og  $x \in \langle 0, \pi \rangle$ .

c) Gi en praktisk tolkning av svaret i oppgave b).

### Oppgave 2 (6 poeng)

a) Finn summen av den aritmetiske rekken  $3 + 7 + 11 + 15 + \dots + 399$ .

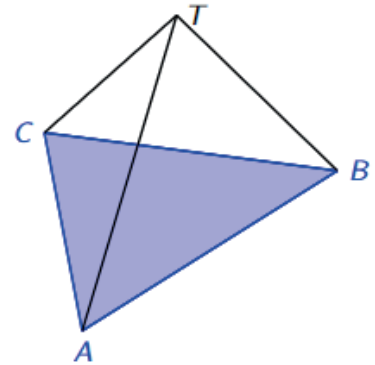
b) Bestem kvotienten  $k$  for en uendelig geometrisk rekke som konvergerer og som har  $a_1 = 12$  og sum = 18.

c) Vis at tallet  $0,75757575\dots$  kan skrives som en uendelig geometrisk rekke.

Bruk dette til å vise at  $1,75757575\dots = \frac{58}{33}$ .

### Oppgave 3 (4 poeng)

Et telt står i en plan skråning. Teltet har tre rette teltstenger som er plassert i punktene  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(3, 1, 2)$  og  $C(-1, 3, 1)$ . De tre teltstengene er samlet i toppunktet  $T$ .



a) Bestem arealet av bunnen i teltet.

Lengden av teltstanga fra punkt  $C$  til punkt  $T$  er  $\sqrt{17}$ . Teltstanga fra punkt  $A$  til punkt  $T$  følger linja  $\ell$ , gitt ved

$$\ell: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$$

b) Bestem koordinatene til toppunktet  $T$ .

### Oppgave 4 (4 poeng)

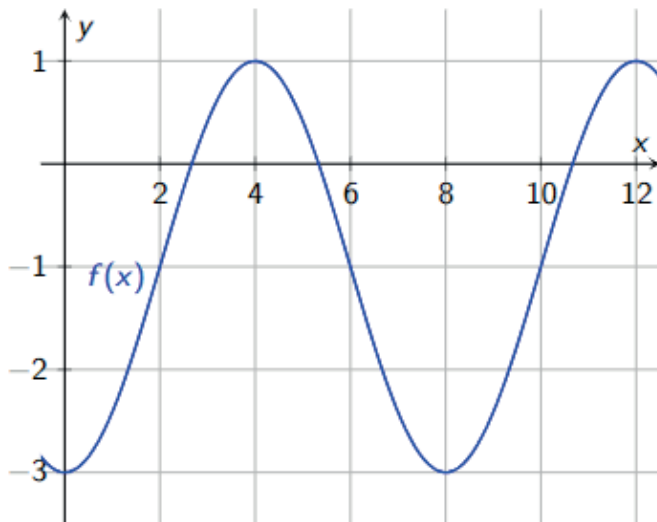
a) Hva er definisjonen av det absolutte vinkelmålet (radianen) til en vinkel? Hvor mange radianer er  $80^\circ$ ?

b) Finn de eksakte verdiene til  $\cos v$  og  $\tan v$  når  $\sin v = -\frac{1}{4}$  og  $v \in \left[ \pi, \frac{3\pi}{2} \right]$ .

## Oppgave 5 (4 poeng)

Figuren viser grafen til funksjonen

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$$



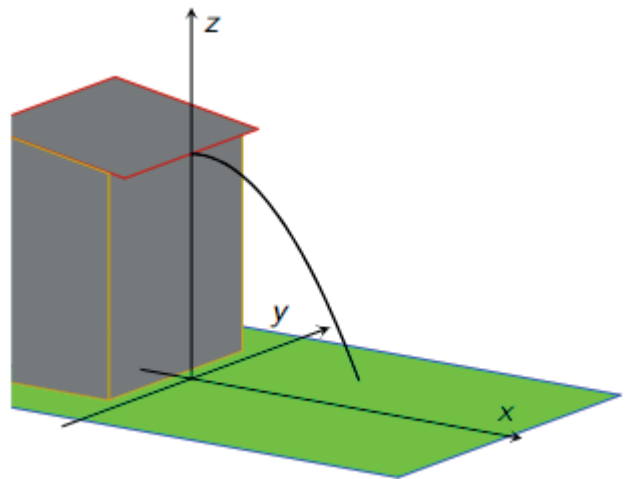
- a) Bestem en funksjon på formen  $g(x) = A \cdot \cos(cx + \varphi) + d$ , som passer til grafen.
- b) Løs likningen  $\cos\left(\frac{\pi}{4}x - \pi\right) = \frac{1}{2}$ , der  $x \in [0, 3\pi]$ .  
Forklar hvor på figuren løsningene ligger.

## Del 2

### Oppgave 1 (6 poeng)

En ball ruller av taket på et hus og ned på bakken. Vi plasserer et koordinatsystem slik at

- $y$ -aksen ligger på bakken parallelt med husveggen
- $x$ -aksen ligger på bakken, står vinkelrett på husveggen og skjærer  $y$ -aksen der ballen forlater hustaket
- $z$ -aksen angir høyden over bakken med positiv retning oppover



Måleenheten på aksene er meter.

Posisjonen til ballen er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [2t, 4t, 6 - 0.7t - 4.9t^2]$$

der  $t$  er antall sekunder etter at ballen forlater taket.

- a) Hvor høyt over bakken er kanten på taket?  
Hva er posisjonen til ballen etter 0,5 s?
- b) Bestem farten til ballen når den treffer bakken.
- c) Ved hvilket tidspunkt er farten til ballen 10 m/s?

## Oppgave 2 (6 poeng)

Avgjør om hver enkelt påstand nedenfor er sann eller usann. Forklar tydelig hvordan du har resonnert.

a) **Påstand:** Likningen til et plan kan alltid bestemmes av 3 punkter i planet.

b) En uendelig geometrisk rekke er gitt ved  $1 + (\ln x - 1) + (\ln x - 1)^2 + \dots$ .

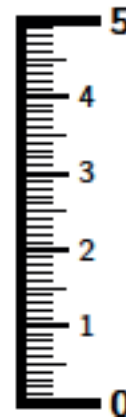
**Påstand:** Dersom  $x = \frac{1}{e}$  vil summen av rekka være  $\frac{1}{3}$ .

c) To funksjoner er gitt ved  $f(x) = x^3 - x^2 - ax$ , der  $a \in \mathbb{R}$ , og  $g(x) = -x^2 + x$ .

**Påstand:** Grafene til  $f$  og  $g$  avgrensner to områder som er like store når  $a > -1$ .

## Oppgave 3 (2 poeng)

Bildet viser tverrsnittet av et jordbær i målestokk 1:1. Bruk integrasjon og omdreiningssystemet til å beregne volumet av hele jordbæret. Kommenter formen på omdreiningssystemet ditt og vurder svaret.



### Oppgave 4 (6 poeng)

Anders og Ivana har kjøpt seg russebil. De skal kjøre bilen til en garasje, men på turen begynner motoren å fuske. Farten  $v$  følger funksjonen

$$v(t) = -6 \sin\left(360t - \frac{\pi}{2}\right) + 54$$

Her er  $v$  gitt i km/t, og  $t$  er antall timer etter at motoren har begynt å fuske.

- Bestem det første tidspunktet gjennomsnittsfarten blir 54 km/t.
- På hvilke tidspunkt har bilen størst akselerasjon når den kjører med farten  $v$ ? Hvor stor er denne akselerasjonen?

Når bilen begynner å fuske, er det 2 km til garasjen som bilen skal parkeres i.

- Hvor lenge må Anders og Ivana kjøre for å komme til garasjen, når bilen kjører med farten  $v$ ?

### Oppgave 5 (4 poeng)

- Bestem en rekursiv formel for tallfølgen 1, 2, 6, 15, 31, 56, ....
- Bruk den rekursive formelen du fant i oppgave a), og lag et program som regner ut summen av de 30 første leddene i tallfølgen.

Husk å legge ved bilde av både koden og resultatet av kjøringen.

### Oppgave 6 (2 poeng)

En sirkel har sentrum i  $S(a, 0)$  og har radius  $R < a$ . Sirkelen roteres om  $y$ -aksen.

Vis at volumet av omdreiningslegemet blir  $2\pi^2 R^2 a$ .

### TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

**Lykke til!**

### TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

**Lykke til!**