Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonen $f(x) = 2(\ln x + 1)^3$.

b) Gitt funksjonen $f(x) = x \cdot \cos x$.

1) Ligger grafen over eller under x - aksen når $x = \pi$?

2) Stiger eller synker grafen når $x = \pi$?

(Du kan få bruk for at $\sin \pi = 0$ og $\cos \pi = -1$.)

c) Bestem summen av den uendelige rekka $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots$

d) Gitt punktene $A(2, 3, 7)$, $B(3, 5, 2)$, $C(1, 1, 5)$ og $D(3, 5, t)$.

1) Bestem en verdi for t slik at $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.

2) Undersøk om det finnes en verdi for t slik at $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

e) Løs differensiallikningen $y' + 4x \cdot y = 0$, der $y(0) = 5$.

f) Bestem integralene

1) $\int x \cdot \sin(2x) \, dx$

2) $\int \frac{4}{x^2 - 4} \, dx$

Oppgave 2

Vi har gitt punktene $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 2)$, $C(1, 1, 2)$ og $D(4, 1, -3)$.

a) Finn $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Vis at arealet av trekanten ABC er lik $\dfrac{3}{2}$.

b) Bestem volumet av pyramiden $ABCD$.

c) Finn likningen for planet α som går gjennom punktene A, B og C.

Del 2

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi lage en modell for temperaturen i vannet i et badekar. Badekaret er fylt med vann som til å begynne med har temperaturen $38\,^\circ\text{C}$. Romtemperaturen er konstant lik $21\,^\circ\text{C}$.

Vi lar $y(t)$ være vannets temperatur i grader celsius etter t timer.

a) Forklar hva $y'(t)$ forteller oss, og hvorfor $y'(t)$ er negativ i denne oppgaven.

Vi antar at temperaturendringen per time er proporsjonal med differansen mellom vanntemperaturen $y(t)$ og romtemperaturen. Proporsjonalitetskonstanten er k.

b) Forklar at den differensiallikningen som beskriver denne problemstillingen, er

$$y' = k(y - 21)$$

c) Forklar hvorfor $y(0) = 38$. Løs differensiallikningen ved regning.

d) Etter 3 timer er vanntemperaturen $27\,^\circ\text{C}$. Bruk dette til å bestemme k.

e) Bestem $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$. Kommenter svaret.

Oppgave 4

Du skal besvare <u>enten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

<u>Alternativ I</u>

Funksjonen f er gitt ved $f(x)=2\cdot(\sin x)^2$.

a) Tegn grafen til f når $x\in\left[0,\ 2\pi\right\rangle$.

b) Grafen er en sinuskurve. Bruk grafen til å vise at vi tilnærmet kan lese av at f kan skrives på formen

$$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1$$

c) Bruk formelen for $\sin(u-v)$ til å vise at uttrykket i b) stemmer med $f(x)=2\cdot(\sin x)^2$.

d) Bestem ved regning koordinatene til eventuelle topp-, bunn- og vendepunkter på grafen til f når $x\in\left\langle 3\pi,\ 4\pi\right\rangle$.

<u>Alternativ II</u>

I deler av denne oppgaven er det en fordel å bruke digitalt verktøy.

Gitt funksjonen $f(x)=4\cdot e^{-0{,}2x}\cdot\left(4\sin(2x)+3\cos(2x)\right)$ når $x\in\left\langle 0,\ 5\pi\right\rangle$.

a) Skisser, eller ta en utskrift av, grafen til f.

b) Finn nullpunktene, topp-, bunn- og vendepunktene på grafen til f når $x\in\left\langle 0,\ \pi\right\rangle$.

Funksjonsuttrykket til f kan skrives på formen $f(x)=K\cdot e^{-0{,}2x}\cdot\sin(2x+\varphi)$.

c) Finn konstantene K og φ.

d) $y=f(x)$, der $f(x)$ er funksjonen ovenfor, er en løsning av differensiallikningen

$$y''+ay'+by=0$$

Bestem konstantene a og b.

Oppgave 5

Trekanttall kan illustreres som antall golfballer som danner en trekantfigur. Figuren nedenfor viser de tre første trekanttallene a_1, a_2 og a_3.

S_n er summen av de n første trekanttallene.

a) Skriv opp de fem første trekanttallene a_1, a_2, a_3, a_4 og a_5 og de fem første summene S_1, S_2, S_3, S_4 og S_5.

b) Forklar at $a_n = 1+2+3+\cdots+n$. Bruk dette til å vise at $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

c) Bruk regresjon på de fem første summene S_1, S_2, S_3, S_4 og S_5 til å finne et tredjegradsuttrykk for S_n. Vis at tredjegradsuttrykket er en tilnærming av

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Resultatet ovenfor gjelder i prinsippet bare for de fem første summene S_1, S_2, S_3, S_4 og S_5. Vi ønsker å undersøke om formelen gjelder for alle n- verdier. Da må vi gjennomføre et matematisk bevis.

d) Bruk induksjon til å bevise at formelen $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ er riktig.