Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonen gitt ved $f(x) = x^2 \cdot \cos(3x)$

b) Bestem integralene

1) $\int 5x \cdot e^{2x}\ dx$

2) $\int \frac{6x}{x^2 - 1} dx$

c) Løs differensiallikningen

$$y' - 2y = 3 \qquad \text{når} \qquad y(0) = 2$$

d) 1) Bruk formlene

$$\cos(u - v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$$
$$\cos(u + v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

til å vise

$$\cos u \cdot \cos v = \frac{1}{2}\left(\cos(u - v) + \cos(u + v)\right)$$

2) Bruk 1) til å finne et uttrykk for $\left(\cos x\right)^2$. Bestem integralet

$$\int (\cos x)^2\ dx$$

e) I denne oppgaven får du bruk for den generelle sammenhengen

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Tabellen nedenfor viser noen funksjonsverdier for funksjonene f, g og h.

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
-3	0	6	6
1	-2	$\frac{-7}{2}$	-4
2	24	28	22

Det opplyses i tillegg at $f(x) = g'(x)$ og $h(x) = g''(x)$.

Bruk tabellen og tilleggsopplysningene til å finne integralene

1) $\int_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

2) $\int_{-3}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x$

Oppgave 2

Vi har gitt punktene $A(3,\,0,\,-2)$, $B(0,\,2,\,0)$ og $C(1,\,-1,\,4)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

b) Finn en likning for planet α som går gjennom punktene A, B og C.

En rett linje l går gjennom punktet $P(5,\,4,\,4)$ og står vinkelrett på planet α.

c) Vis at en parameterframstilling for l er $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$

Finn skjæringspunktet mellom l og xz – planet.

Vi lar Q være et vilkårlig punkt på linjen l.

d) Bestem volumet av pyramiden $ABCQ$ uttrykt ved t.

e) Bestem koordinatene til Q slik at volumet av pyramiden $ABCQ$ blir 42.

Del 2

I del 2 vil vi følge samme tema i oppgavene 3, 4, 5 og 6 alternativ I.
I noen tilfeller kan resultater i én oppgave komme til nytte i andre oppgaver.

Det presiseres likevel at oppgavene kan løses uavhengig av hverandre.

Oppgave 3

Du skal studere løsningen til differensiallikningen

$$y'' + \frac{2}{5}y' + \frac{26}{25}y = 0$$

a) Bruk løsningen til den karakteristiske likningen til å vise at den generelle løsningen til differensiallikningen er

$$y = \mathrm{e}^{-0{,}2x} \cdot (C \sin x + D \cos x) \quad , \qquad \text{der } C \text{ og } D \text{ er konstanter.}$$

b) Du får oppgitt at $y(0) = 5$ og $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$.

Forklar at løsningen av differensiallikningen da kan skrives

$$y = 5\,\mathrm{e}^{-0{,}2x} \cdot (\sin x + \cos x)$$

(Du kan få bruk for at $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$)

Oppgave 4

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = 5\,e^{-0,2x} \cdot (\sin x + \cos x)$, $x \in \langle 0,\, 15 \rangle$

a) Tegn grafen til f .

b) Bestem ved regning nullpunktene til f .

c) Vis ved regning at

$$f'(x) = 2\,e^{-0,2x} \cdot (2\cos x - 3\sin x)$$

d) Tegn fortegnslinjen til $f'(x)$. Bruk denne til å vise at funksjonsverdiene til toppunktene er $6{,}164$, $1{,}754$ og $0{,}499$.

e) Skriv $f(x)$ på formen

$$f(x) = A\,e^{-0,2x} \cdot \sin(x + \varphi) \;, \qquad \text{der } A \text{ og } \varphi \text{ er konstanter.}$$

Funksjonene p og q er gitt ved $p(x) = A e^{-0,2x}$ og $q(x) = -A e^{-0,2x}$, der A er konstanten du fant i punkt e) over.

f) Forklar at $q(x) \le f(x) \le p(x)$. Tegn grafene til p og q i samme koordinatsystem som grafen til f .

Oppgave 5

Vi vil studere flere egenskaper ved funksjonen

$$f(x) = 5\,e^{-0,2x} \cdot (\sin x + \cos x)$$

når definisjonsmengden er $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

a) Forklar at det n-te nullpunktet til f kan skrives på formen

$$x_n = 2,356 + (n-1) \cdot \pi \,, \qquad \text{der} \quad n \geq 1$$

b) Hva slags tallfølge danner nullpunktene? Hvor mange nullpunkter får vi hvis $x \in \langle 0, 30 \rangle$?

c) De tre første funksjonsverdiene til toppunktene på grafen til f er gitt i oppgave 4 d). Alle disse danner også en tallfølge. Vis at denne tallfølgen er geometrisk, og finn det femte leddet i tallfølgen.

Vi summerer y-koordinatene til alle toppunktene til høyre for origo.

d) Vil den rekken vi får, konvergere når $x \to \infty$? Finn eventuelt summen av den uendelige rekken.

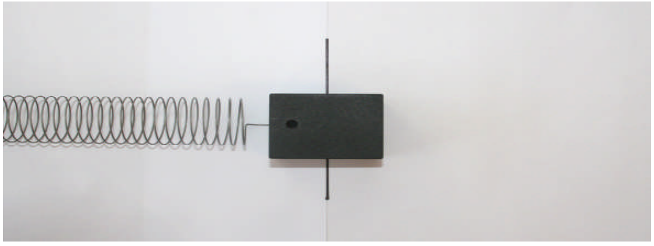
Oppgave 6

Du skal svare på <u>enten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
De to alternativene teller like mye ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen din inneholder deler av begge alternativene, vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

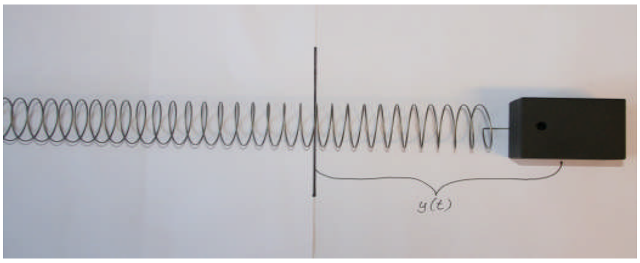
Et lodd med masse m er festet i en fjær som er festet i veggen. Når loddet er i ro, er det i likevektsstilling. Se figur 1.



Figur 1

Vi trekker loddet ut fra likevektsstillingen, gir det et puff bort fra likevektsstillingen, og setter dermed i gang en svingebevegelse fram og tilbake. Se figur 2 og figur 3.

Avstanden fra likevektsstillingen til loddet ved tidspunktet t er $y(t)$. Se figur 2.



Figur 2

Tida t er målt i sekunder, og $y(t)$ er målt i desimeter.

Figur 3

I horisontal retning virker to krefter på loddet:

* En kraft fra fjæra som er proporsjonal med $y(t)$
* En friksjonskraft fra underlaget som er proporsjonal med farten $v(t) = y'(t)$

Akselerasjonen til klossen er $a(t) = v'(t)$

Vi setter $y(t) = y$, $v(t) = v$ og $a(t) = a$.

Newtons 2. lov vil da gi følgende likning

$$-b \cdot v - k \cdot y = m \cdot a$$

der b , k og m er positive konstanter.

a) Vis at denne likningen kan omformes til

$$y'' + \frac{b}{m}\,y' + \frac{k}{m}\,y = 0$$

Vi setter $b = 1{,}0$ Ns/m , $k = 2{,}6$ N/m og $m = 2{,}5$ kg.

b) Vis at du får differensiallikningen

$$y'' + \frac{2}{5}\,y' + \frac{26}{25}\,y = 0$$

Bestem et uttrykk for $y(t)$ når du får oppgitt at $y(0) = 5$ og $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$.

c) Forklar at det går like lang tid mellom hver gang loddet passerer likevektsstillingen.

d) Vis at det maksimale utslaget y på samme side av likevektsstillingen minker med $71{,}5\,\%$ fra ett utslag til det neste.

Alternativ II

Summen av de n første leddene i en rekke er gitt ved

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$$

a) Forklar at $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Finn S_8.

Summen av de n første leddene i en annen rekke er gitt ved

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1 + 8 + 27 + \cdots + n^3$$

b) Bruk digitalt verktøy til å undersøke hvor mange ledd rekken må ha for at summen av rekken skal være større enn 15 000.

Det er blitt påstått at $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

c) Bevis formelen over ved induksjon. (Spørsmål c) teller som to delspørsmål.)

d) Forklar at

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$