DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (13 poeng)

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = 3\sin(2x)$

2) $g(x) = x^2 \cdot \sin x$

3) $k(x) = 5\cos\left(\dfrac{\pi}{12} \cdot x - 2\right) + 7$

b) Bestem integralet

$$\int x \cdot e^{2x} dx$$

c) Vis at

$$\int_3^7 \frac{2x}{x^2 - 4} dx = 2\ln 3$$

d) Løs differensiallikningen

$$y' - 2y = 3 \qquad \text{når} \quad y(0) = 8$$

e) Gitt rekken

$$1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots \qquad , \; x > 0$$

1) Forklar at rekken er geometrisk, og at den konvergerer.

2) Vis at summen er gitt ved

$$S(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Oppgave 2 (5 poeng)

Vi har gitt vektorene $\vec{a} = [3, -1, 2]$ og $\vec{b} = [6, 4, 2]$

Regn ut

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $\vec{a} \times \vec{b}$

c) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$

Oppgave 3 (6 poeng)

Vi har gitt funksjonen

$$f(x) = x \cdot e^x$$

a) Bestem $f'(x)$ og $f''(x)$

b) Bestem koordinatene til bunnpunkt og vendepunkt på grafen til f.

Det blir påstått at den n-te deriverte er gitt ved

$$f^{(n)}(x) = (x + n) \cdot e^x$$

c) Bevis formelen for den n-te deriverte ved induksjon.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 4 (7 poeng)

Kilde: www.micromatic.no (10.12.2011)

En automatisk strømbryter for utelys skal programmeres. Lyset skal slås på når det begynner å mørkne. En modell for dette tidspunktet er gitt ved

$$f(t) = 19 - 4\cos\left(\frac{\pi}{180}\cdot t\right)$$

der $f(t)$ er tidspunktet målt i timer etter midnatt og t er antall dager regnet fra nyttår. I denne modellen forutsettes det at alle måneder har 30 dager.

a) Når begynner det å mørkne 25. mars, ifølge modellen?

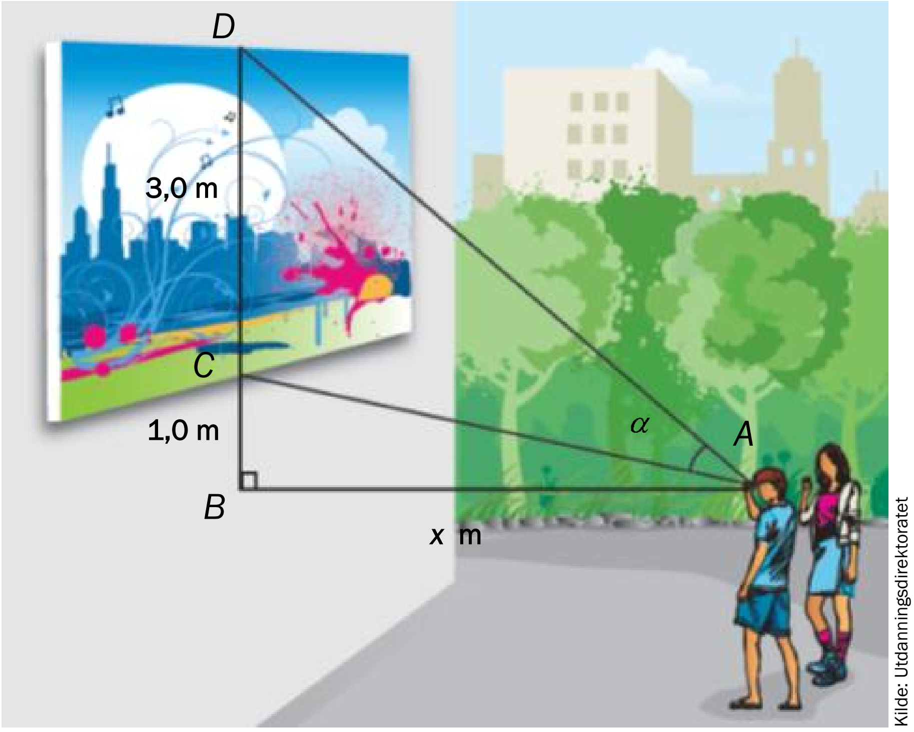
b) Tegn grafen til f. Bestem likevektslinjen, amplituden og perioden til f.
Hva er gjennomsnittlig tidspunkt i løpet av året for når lyset slås på?

c) Bestem når på året lyset slås på klokken 18.00.

d) Bestem når på året dagslyset varer lengst ifølge modellen.

Oppgave 5 (8 poeng)

a) Bruk formlene for $\sin(u-v)$ og $\cos(u-v)$ til å vise at $\tan(u-v) = \dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v}$



Et bilde har høyde CD = 3,0 m. Bildet henger på en vegg slik at undersiden av bildet er 1,0 m over øyenivå hos personen i A (se skissen). Avstanden fra veggen til personen er $AB = x$.

På skissen er $\angle DAC = \alpha$, $\angle DAB = u$ og $\angle CAB = v$. Vi setter $f(x) = \tan(\alpha) = \tan(u-v)$

b) Bruk a) til å vise at

$$f(x) = \frac{3x}{x^2+4}$$

Vi ønsker å bestemme avstanden x slik at synsvinkelen α blir størst mulig.

c) Bestem største verdi for $f(x)$ og tilhørende verdi for x.

d) Bestem den største synsvinkelen α.

Oppgave 6 (6 poeng)

Kilde: www.tu.no/industri/article291230.ece (10.12.2011)

En rask fritidsbåt kjører med farten $25\ \text{m/s}$ da motoren plutselig stanser. Båten bremses ned i vannet, og x sekunder etter motorstansen er farten y m/s, og akselerasjonen er y' m/s^2.

I denne situasjonen gjelder differensiallikningen

$$y' = k \cdot y^2 \quad , \quad k < 0$$

a) Med det samme motoren stanser, er akselerasjonen $-12\ \text{m/s}^2$. Bestem konstanten k.
Vis at den generelle løsningen av differensiallikningen er

$$y = \frac{1}{0{,}02x + C}$$

der C er en konstant.

b) Bestem konstanten C og farten til båten $3\ \text{s}$ etter motorstansen.

Strekningen båten forflytter seg, er $s(x)$ meter etter motorstansen. Da gjelder:

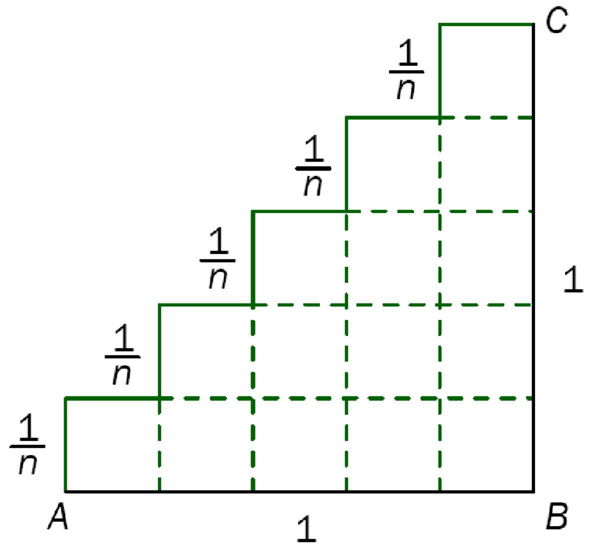
$$s' = y$$

c) Bestem hvor langt båten forflytter seg i løpet av de tre første sekundene etter motorstansen.

Oppgave 7 (6 poeng)

En figur består av n søyler med kvadratiske ruter med side $\frac{1}{n}$. Den første søylen inneholder én rute, den andre to ruter, og så videre. Søyle nummer n inneholder n ruter.

Figuren nedenfor er tegnet for $n=5$



a) Bestem arealet av figuren ovenfor.

b) Forklar at det samlede arealet av n søyler er

$$S_n = 1\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

Vis at summen av rekken kan skrives $S_n = \frac{n+1}{2n}$

c) Bruk rekken til å bestemme S_5. Kommenter svaret.

d) Vis at $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$

Bruk også et geometrisk resonnement til å begrunne at svaret er riktig.

Oppgave 8 (9 poeng)

I et koordinatsystem er det gitt et punkt $P(5, -1, 4)$ og et plan

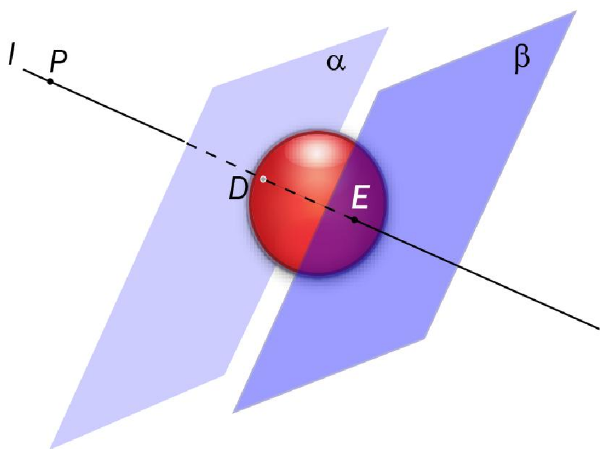
$$\alpha: \ 2x - 2y + z + 2 = 0$$

Punktene $A(0, 0, 4)$, $B(2, 0, 0)$ og $C(1, 1, 4)$ ligger i et annet plan β.

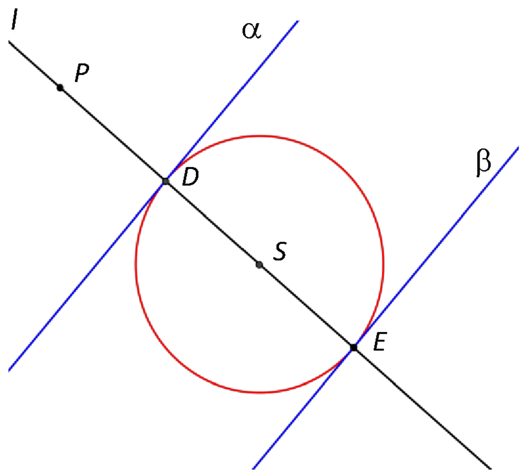
a) Bestem likningen til β, og forklar at $\alpha \parallel \beta$

b) Regn ut avstanden mellom planene α og β.

Planene α og β er begge tangentplan til en kule. Sentrum S i kula og de to tangeringspunktene D og E ligger på en rett linje l gjennom punktet P. Se figurene nedenfor.



Figur 1: Kule og plan i rommet



Figur 2: Tverrsnitt av kule og plan

c) Sett opp en parameterframstilling for l.

d) Bestem koordinatene til D og E.

e) Bestem likningen til kula.