DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = \sin(3x)$

b) $g(x) = e^{2x} \cdot \cos x$

Oppgave 2 (4 poeng)

Regn ut integralene

a) $\int 2x \cdot \sin(x^2)\, dx$

b) $\int_1^e x \cdot \ln x \, dx$

Oppgave 3 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = e^{2x} - 4e^x \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

Bestem koordinatene til eventuelle vendepunkter på grafen til f.

Oppgave 4 (4 poeng)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$s(x) = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \ldots$$

a) Bestem konvergensområdet til rekken.

b) Løs likningene

$$s(x) = 3 \text{ og } s(x) = \frac{1}{3}$$

Oppgave 5 (5 poeng)

Planet α er gitt ved

$$\alpha: \ 2x + y - 2z + 3 = 0$$

a) Vis at punktet $P(3, 4, 2)$ *ikke* ligger i planet α.

En linje ℓ går gjennom P slik at $\ell \perp \alpha$.

b) Bestem en parameterframstilling for ℓ.

c) Bestem koordinatene til skjæringspunktet mellom ℓ og α.

d) Bestem avstanden fra P til α.

Oppgave 6 (4 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = a\sin(cx + \varphi) + d$$

Grafen til funksjonen har et toppunkt i $(0, 7)$. Det nærmeste bunnpunktet til høyre for dette toppunktet er $(2, 3)$.

a) Forklar at funksjonsuttrykket kan skrives

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) + 5$$

b) Lag en skisse av grafen til f for $x \in [0, 12]$.

Oppgave 7 (2 poeng)

Løs differensiallikningen

$$y' - 3y = 2 \qquad \text{når} \quad y(0) = \frac{1}{3}$$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Punktene $A(4,\ 3,\ 1)$, $B(2,\ 2,\ 0)$ og $C(1,\ 2,\ -2)$ er gitt.

En setning i geometrien sier:

> Et plan er entydig bestemt av tre punkter dersom disse punktene ikke ligger på en rett linje.

a) Bruk denne setningen til å vise at punktene A, B og C bestemmer et plan α entydig.

b) Bestem en likning til planet α.

Et punkt T har koordinatene $(2,\ 5,\ 4t+1)$.

c) Bestem t slik at volumet av pyramiden $ABCT$ blir 3.

Oppgave 2 (5 poeng)

En kuleflate er gitt ved likningen

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+2=0$$

a) Vis at punktet $P(2,\ 3,\ 5)$ ligger på kuleflaten.

b) Bestem sentrum og radius til kulen.

c) Bestem likningen til planet som tangerer kuleflaten i punktet P.

Oppgave 3 (7 poeng)

I en kriminalserie på TV ble et drapsoffer funnet kl. 11.00. Kroppstemperaturen ble da målt til $30\ ^\circ\text{C}$. Rommet der den drepte ble funnet, hadde hatt en konstant temperatur på $22\ ^\circ\text{C}$ siden mordet skjedde.

Vi lar kroppstemperaturen være $y(t)$ grader Celsius t timer etter at den døde ble funnet.

a) Ifølge Newtons avkjølingslov er temperaturendringen per time proporsjonal med differansen mellom kroppstemperaturen og romtemperaturen. Forklar at dette gir differensiallikningen

$$y' = -k(y-22) \quad \text{der} \quad k > 0$$

b) Forklar at $y(0) = 30$, og løs differensiallikningen ved regning.

c) En time etter at den døde ble funnet, ble kroppstemperaturen målt til $28\ ^\circ\text{C}$. Bruk dette til å bestemme konstanten k.

Vi antar at drapsofferet hadde en kroppstemperatur på $37\ ^\circ\text{C}$ like etter at døden inntraff.

d) Bruk $y(t)$ til å anslå når drapet ble utført.

Oppgave 4 (7 poeng)

En uendelig rekke er gitt ved

$$1+x+x^2+x^3+\dots$$

a) Vis at $1+x+x^2+x^3+\dots=\dfrac{1}{1-x}$, når $x\in\langle -1, 1\rangle$

Det kan vises at

$$(1)'+(x)'+(x^2)'+(x^3)'+\dots=\left(\frac{1}{1-x}\right)', \quad \text{når} \quad x\in\langle -1, 1\rangle$$

b) Vis at

$$1+2x+3x^2+4x^3+\dots=\frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{når} \quad x\in\langle -1, 1\rangle$$

c) Bruk resultatet i oppgave b) til å vise at

$$1+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\dots=4$$

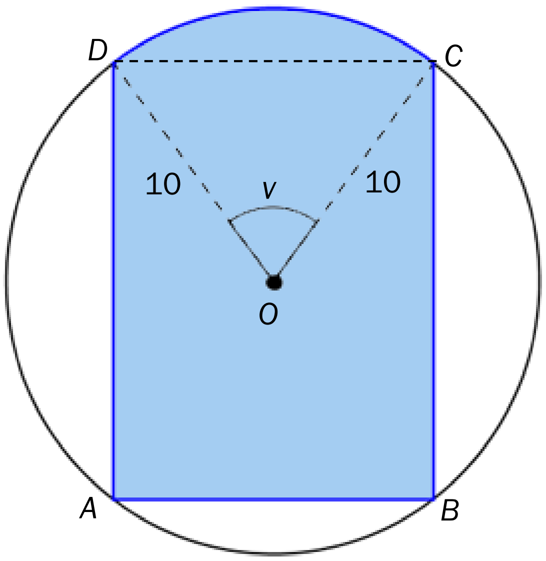
d) Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n):\quad 1+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\dots+\frac{n}{2^{n-1}}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}} \quad , \quad n\in\mathbb{N}$$

e) Bruk det du har funnet ovenfor til å bestemme $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$

Oppgave 5 (5 poeng)

Et rektangel $ABCD$ er innskrevet i en sirkel. Sirkelen har sentrum i O og radius 10.
Vi setter $\angle COD = v$, der $0 < v < \pi$. Se figuren nedenfor.



a) Vis ved regning at arealet F av sirkelsektoren COD er

$$F(v) = 50v$$

b) Vis ved regning at arealet T av det fargelagte området på figuren kan skrives som

$$T(v) = 50(v + 3\sin v)$$

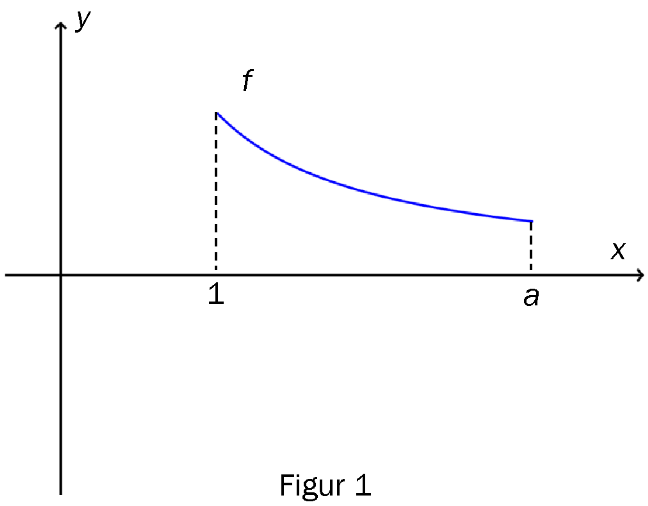
c) Bestem v grafisk slik at T blir størst mulig. Bestem T_{maks}.

Oppgave 6 (6 poeng)

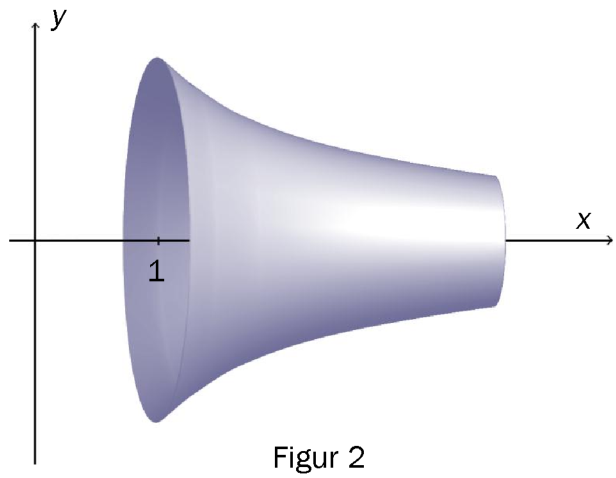
Figur 1 nedenfor viser grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \qquad x \in \left[1\ ,\ a\right]$$

Vi dreier grafen til f $360°$ om x-aksen. Vi får da fram et omdreiningslegeme som vist på figur 2.



Figur 1



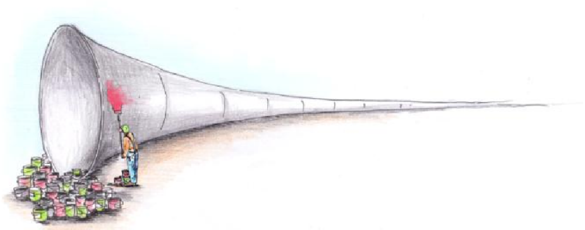
Figur 2

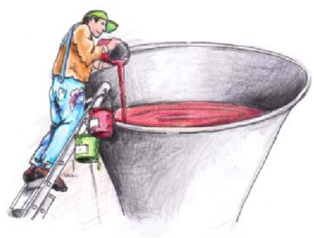
a) Bestem volumet $V(a)$ av omdreiningslegemet.

b) Bestem $\int_1^a f(x)\,dx$. Omdreiningslegemet har overflateareal $O(a)$. Forklar at $O(a) > \int_1^a f(x)\,dx$.

c) Vi lar $a \to \infty$. Det omdreiningslegemet vi da får, kalles *Gabriels horn*.

Bestem $\lim\limits_{a\to\infty} O(a)$ og $\lim\limits_{a\to\infty} V(a)$ dersom grenseverdiene eksisterer. Kommenter svarene.


Å male Gabriels horn ...


Å fylle Gabriels horn ...