Utdanningsdirektoratet

Eksamen

22.05.2020

REA3024 Matematikk R2

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timar.
Hjelpemiddel	Del 1: Skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar (På del 1 er det ikkje tillate å bruke datamaskin.) Del 2: Alle hjelpemiddel er tillatne, bortsett frå opent Internett og andre verktøy som kan brukast til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemiddel under eksamen, har du ikkje lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måtar å utveksle informasjon med andre på er ikkje tillate.
Informasjon om oppgåva	Del 1 har 9 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast.
Kjelder	— Papirrull: https://pixabay.com/images/id-2030052/ — Alle andre grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderinga	Sjå eksamensrettleiinga med kjenneteikn på måloppnåing til sentralt gitt skriftleg eksamen. Eksamensrettleiinga finn du på Utdanningsdirektoratets nettsider.

Del 1

Oppgåve 1 (3 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = x \cdot \sin x$

b) $g(x) = \dfrac{\cos(x^2)}{x}$

Oppgåve 2 (6 poeng)

Bestem integrala

a) $\int \left(x^2 + 3 + e^{2x}\right) dx$

b) $\int 6x \cdot \sin(x^2) dx$

c) $\int_1^e x \cdot \ln x \, dx$

Oppgåve 3 (4 poeng)

I ei aritmetisk rekkje er $a_1 = 3$, og summen av dei 5 første ledda er 55.

a) Kva blir summen av dei 10 første ledda?

Ei uendeleg geometrisk rekkje er gitt ved

$$7 + \frac{7}{2} + \frac{7}{4} + \cdots$$

b) Grunngi at rekkja konvergerer, og bestem summen.

Oppgåve 4 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=2\sin(\pi x+\pi)-1 \quad , \quad x\in\langle -1,3\rangle$$

a) Bestem koordinatane til toppunkta og botnpunkta på grafen til f .

b) Bestem skjeringspunkta mellom grafen til f og kvar av koordinataksane.

c) Lag ei skisse av grafen til f .

Oppgåve 5 (6 poeng)

Vi har punkta $A(-1,3,2)$, $B(2,2,1)$, $C(0,1,0)$ og $T(5,3,8)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Vis at $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=[0\,,5\,,-5]$.

b) Bestem volumet av pyramiden $ABCT$.

c) Bestem likninga for planet som inneheld punkta A, B og C .

Oppgåve 6 (4 poeng)

Ei uendeleg geometrisk rekkje er gitt ved

$$2+\ln x+\frac{(\ln x)^2}{2}+\cdots$$

a) Bestem konvergensområdet til rekkja.

b) Bestem x slik at summen av rekkja blir 4 .

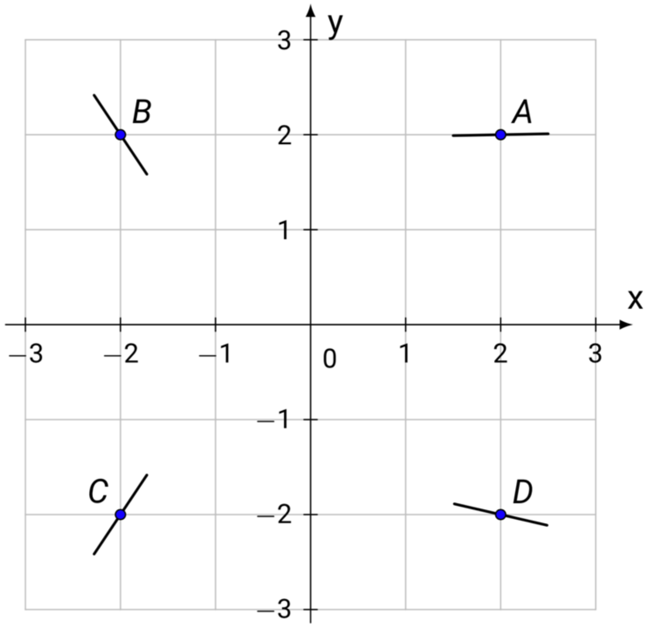
Oppgåve 7 (2 poeng)

Differensiallikninga

$$2x \cdot y' - 3y = 0$$

har integralkurver som går gjennom punkta A, B, C og D på figuren til høgre. I kvart av punkta er det markert ei tangentretning.

Vurder for kvart av dei fire punkta om den markerte tangentretninga samsvarer med retninga til tangenten til integralkurva som går gjennom punktet. Grunngi svaret.



Oppgåve 8 (3 poeng)

To plan α og β er gitt ved

$$\alpha: -2x + 2y - z = 21$$

$$\beta: -7x + 4y - 4z = 56$$

Ei kuleflate tangerer α i punktet $P(-3, 7, -1)$ og β i punktet $Q(-4, 5, -2)$.

Bestem ei likning for kuleflata.

Oppgåve 9 (3 poeng)

Ei følgje er gitt ved $a_1 = 2$ og $a_n = a_{n-1} + n$.

Bruk induksjon til å vise at $a_n = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Del 2

Oppgåve 1 (8 poeng)

Tabellen nedanfor viser det elektriske energiforbruket («straumforbruket») for ein bustad månad for månad i 2019. Energiforbruket er målt i kWh.

Månad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Energiforbruk (kWh)	1540	1480	1320	1050	800	750	660	730	940	1170	1300	1520

a) Bruk regresjon til å bestemme ein trigonometrisk funksjon som passar godt med informasjonen i tabellen.

For ein annan bustad er funksjonen f gitt ved

$$f(t) = 1300 + 730 \cdot \sin\left(0{,}52 \cdot t + 1{,}07\right)$$

ein god modell for energiforbruket per månad i 2019. Her er $f(1)$ forbruket i januar, $f(2)$ forbruket i februar, og så vidare.

b) Når auka forbruket raskast, ifølgje modellen f ?

c) Bestem $\int_0^{12} f(t)\,\mathrm{d}t$. Gi ei praktisk tolking av svaret.

Energiprisen varierer også med tida på året. Funksjonen p gitt ved

$$p(t) = 0{,}85 + 0{,}17 \cdot \sin\left(0{,}52 \cdot t + 1{,}07\right)$$

er ein god modell for energiprisen i kroner per kWh. Her er $p(1)$ den gjennomsnittlege energiprisen i januar, $p(2)$ den gjennomsnittlege prisen i februar, og så vidare.

d) Bestem den årlege energikostnaden til bustaden dersom vi legg modellane f og p til grunn.

Oppgåve 2 (8 poeng)

Ved radioaktiv stråling minkar massen til eit radioaktivt stoff med ein vekstfart som til kvar tid er proporsjonal med massen som er igjen av det radioaktive stoffet.

La $M(t)$ vere massen til det radioaktive stoffet t timar etter eit gitt tidspunkt.

a) Grunngi at differensiallikninga $M' = k \cdot M$ beskriv situasjonen.
   Forklar kvifor $k < 0$.

Ved tida $t = 0$ timar var massen til det radioaktive stoffet 100 mg. Ved $t = 6$ timar var massen til det radioaktive stoffet 97 mg.

b) Bestem funksjonsuttrykket $M(t)$.

c) Kor lang tid vil det gå før massen til det radioaktive stoffet er 2 mg?

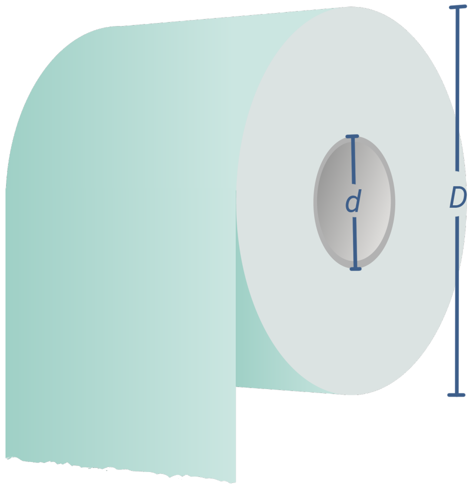
Dette radioaktive stoffet blir vurdert som ikkje helsefarleg dersom massen minkar med mindre enn $0{,}2$ mg per time.

d) Kor lang tid går det før dette stoffet ikkje lenger blir vurdert som helsefarleg?

Oppgåve 3 (6 poeng)

Det inste papirlaget på ein tørkerull har diameter $d = 5{,}00\ \text{cm}$.

Papiret er $0{,}015\ \text{cm}$ tjukt.



Lengda på papiret på den inste runden på rullen er da $\pi \cdot 5{,}00\ \text{cm}$. Den neste runden med papir har diameter $(5{,}00 + 2 \cdot 0{,}015)\ \text{cm} = 5{,}03\ \text{cm}$. Lengda på papiret i denne runden er derfor $\pi \cdot 5{,}03\ \text{cm}$.

Diameteren på rullen aukar med $0{,}03\ \text{cm}$ for kvar ny runde med papir.

a) Kor mange meter papir er det igjen på tørkerullen når det er 50 rundar igjen før han er tom?

b) Kor mange meter papir er det på tørkerullen når diameteren D er $20{,}00\ \text{cm}$?

c) Kva er diameteren D når det er 500 meter papir igjen på tørkerullen?

Oppgåve 4 (2 poeng)

Vi har punkta $A(-1, -1, 2)$, $B(3, 4, -1)$, $C(5, 3, 1)$ og $D(5, 6, 4)$.

- Planet α går gjennom A, B og C.
- Linja ℓ går gjennom A og D.

Ei kuleflate har radius 8 og sentrum S som ligg på ℓ. Kuleflata tangerer α.

Bestem dei moglege koordinatane til S.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer.
Hjelpemidler	Del 1: Skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. (På del 1 er det ikke tillatt å bruke datamaskin.) Del 2: Alle hjelpemidler er tillatt, bortsett fra åpent Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemidler under eksamen, har du ikke lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måter å utveksle informasjon med andre på er ikke tillatt.
Informasjon om oppgaven	Del 1 har 9 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres.
Kilder	— Papirrull: https://pixabay.com/images/id-2030052/ — Alle andre grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderingen	Se eksamensveiledningen med kjennetegn på måloppnåelse til sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på Utdanningsdirektoratets nettsider.

Del 1

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = x \cdot \sin x$

b) $g(x) = \dfrac{\cos(x^2)}{x}$

Oppgave 2 (6 poeng)

Bestem integralene

a) $\int \left(x^2 + 3 + e^{2x}\right) dx$

b) $\int 6x \cdot \sin(x^2) dx$

c) $\int_1^e x \cdot \ln x \, dx$

Oppgave 3 (4 poeng)

I en aritmetisk rekke er $a_1 = 3$, og summen av de 5 første leddene er 55.

a) Hva blir summen av de 10 første leddene?

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$7 + \frac{7}{2} + \frac{7}{4} + \cdots$$

b) Begrunn at rekken konvergerer, og bestem summen.

Oppgave 4 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=2\sin(\pi x+\pi)-1 \quad , \quad x\in\langle -1,3\rangle$$

a) Bestem koordinatene til toppunktene og bunnpunktene på grafen til f.

b) Bestem skjæringspunktene mellom grafen til f og hver av koordinataksene.

c) Lag en skisse av grafen til f.

Oppgave 5 (6 poeng)

Vi har punktene $A(-1,3,2)$, $B(2,2,1)$, $C(0,1,0)$ og $T(5,3,8)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Vis at $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=[0\,,5\,,-5]$.

b) Bestem volumet av pyramiden $ABCT$.

c) Bestem likningen for planet som inneholder punktene A, B og C.

Oppgave 6 (4 poeng)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$2+\ln x+\frac{(\ln x)^2}{2}+\cdots$$

a) Bestem rekkens konvergensområde.

b) Bestem x slik at summen av rekken blir 4.

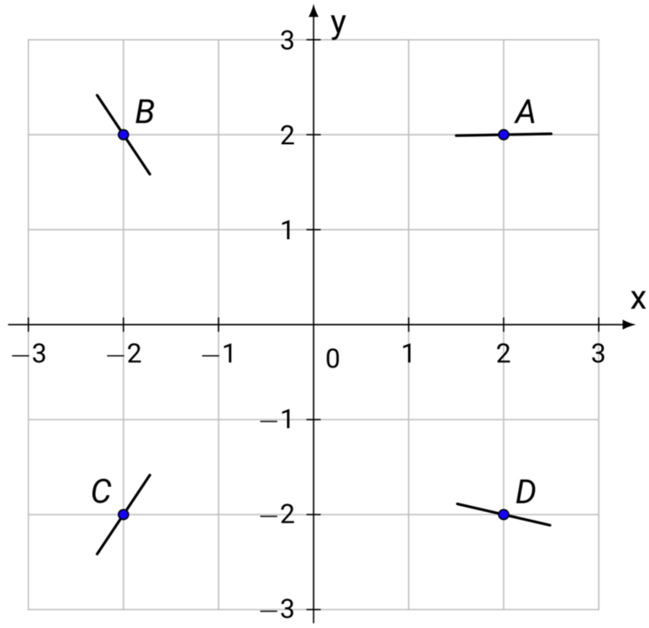
Oppgave 7 (2 poeng)

Differensiallikningen

$$2x \cdot y' - 3y = 0$$

har integralkurver som går gjennom punktene A, B, C og D på figuren til høyre. I hvert av punktene er det markert en tangentretning.

Vurder for hvert av de fire punktene om den markerte tangentretningen samsvarer med retningen til tangenten til integralkurven som går gjennom punktet. Grunngi svaret.



Oppgave 8 (3 poeng)

To plan α og β er gitt ved

$$\alpha: -2x + 2y - z = 21$$

$$\beta: -7x + 4y - 4z = 56$$

En kuleflate tangerer α i punktet $P(-3, 7, -1)$ og β i punktet $Q(-4, 5, -2)$.

Bestem en likning for kuleflaten.

Oppgave 9 (3 poeng)

En følge er gitt ved $a_1 = 2$ og $a_n = a_{n-1} + n$.

Bruk induksjon til å vise at $a_n = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Del 2

Oppgave 1 (8 poeng)

Tabellen nedenfor viser det elektriske energiforbruket («strømforbruket») for en bolig måned for måned i 2019. Energiforbruket er målt i kWh.

Måned	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Energiforbruk (kWh)	1540	1480	1320	1050	800	750	660	730	940	1170	1300	1520

a) Bruk regresjon til å bestemme en trigonometrisk funksjon som passer godt med informasjonen i tabellen.

For en annen bolig er funksjonen f gitt ved

$$f(t) = 1300 + 730 \cdot \sin\left(0{,}52 \cdot t + 1{,}07\right)$$

en god modell for energiforbruket per måned i 2019. Her er $f(1)$ forbruket i januar, $f(2)$ forbruket i februar, og så videre.

b) Når økte forbruket raskest, ifølge modellen f ?

c) Bestem $\int_0^{12} f(t)\,\mathrm{dt}$. Gi en praktisk tolkning av svaret.

Energiprisen varierer også med tiden på året. Funksjonen p gitt ved

$$p(t) = 0{,}85 + 0{,}17 \cdot \sin\left(0{,}52 \cdot t + 1{,}07\right)$$

er en god modell for energiprisen i kroner per kWh. Her er $p(1)$ den gjennomsnittlige energiprisen i januar, $p(2)$ den gjennomsnittlige prisen i februar, og så videre.

d) Bestem den årlige energikostnaden til boligen dersom vi legger modellene f og p til grunn.

Oppgave 2 (8 poeng)

Ved radioaktiv stråling avtar massen til et radioaktivt stoff med en vekstfart som til enhver tid er proporsjonal med massen som er igjen av det radioaktive stoffet.

La $M(t)$ være massen til det radioaktive stoffet t timer etter et gitt tidspunkt.

a) Begrunn at differensiallikningen $M' = k \cdot M$ beskriver situasjonen.
Forklar hvorfor $k < 0$.

Ved tiden $t = 0$ timer var massen til det radioaktive stoffet 100 mg. Ved $t = 6$ timer var massen til det radioaktive stoffet 97 mg.

b) Bestem funksjonsuttrykket $M(t)$.

c) Hvor lang tid vil det gå før massen til det radioaktive stoffet er 2 mg?

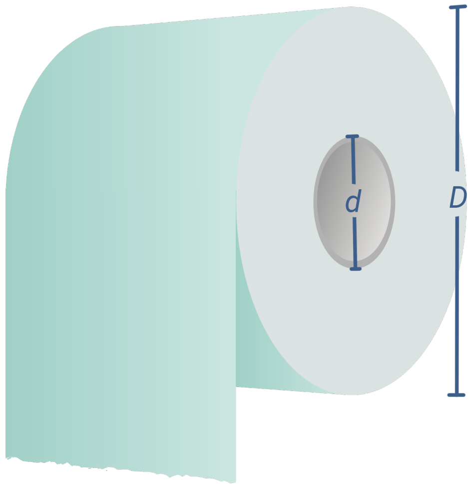
Dette radioaktive stoffet blir vurdert som ikke helsefarlig dersom massen minker med mindre enn $0{,}2$ mg per time.

d) Hvor lang tid går det før dette stoffet ikke lenger blir vurdert som helsefarlig?

Oppgave 3 (6 poeng)

Det innerste papirlaget på en tørkerull har diameter $d = 5{,}00$ cm.

Papiret er $0{,}015$ cm tykt.



Lengden på papiret på den innerste runden på rullen er da $\pi \cdot 5{,}00$ cm. Den neste runden med papir har diameter $(5{,}00 + 2 \cdot 0{,}015)$ cm $= 5{,}03$ cm. Lengden på papiret i denne runden er derfor $\pi \cdot 5{,}03$ cm.

Diameteren på rullen øker med $0{,}03$ cm for hver ny runde med papir.

a) Hvor mange meter papir er det igjen på tørkerullen når det er 50 runder igjen før den er tom?

b) Hvor mange meter papir er det på tørkerullen når diameteren D er $20{,}00$ cm?

c) Hva er diameteren D når det er 500 meter papir igjen på tørkerullen?

Oppgave 4 (2 poeng)

Vi har punktene $A(-1, -1, 2)$, $B(3, 4, -1)$, $C(5, 3, 1)$ og $D(5, 6, 4)$.

- Planet α går gjennom A, B og C.
- Linjen ℓ går gjennom A og D.

En kuleflate har radius 8 og sentrum S som ligger på ℓ. Kuleflaten tangerer α.

Bestem de mulige koordinatene til S.

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!