Utdanningsdirektoratet

Eksamen

25.05.2022

REA3024 Matematikk R2

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel	Del 1: skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar. (På del 1 er det ikkje tillate å bruke datamaskin.) Del 2: Etter tre timar er alle hjelpemiddel tillatne, bortsett frå opent Internett og andre verktøy som kan brukast til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemiddel under eksamen, har du ikkje lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måtar å utveksle informasjon med andre på er ikkje tillatne.
Informasjon om oppgåva	Del 1 har 9 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi noko utteljing. Poeng i del 1 og del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast.
Kjelder	Alle andre grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderinga	Sjå eksamensrettleiinga med kjenneteikn på måloppnåing til sentralt gitt skriftleg eksamen. Eksamensrettleiinga finn du på nettsidene til Utdanningsdirektoratet.

Del 1

Oppgåve 1 (4 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = 3x \cdot \sin x$

b) $g(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\cos x}$

Oppgåve 2 (4 poeng)

Bestem integrala

a) $\int (\mathrm{e}^x - \sin x)\,\mathrm{d}x$

b) $\int_0^{\pi/4} \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$

Oppgåve 3 (2 poeng)

Løys likninga

$$2\cos(3x) = -\sqrt{3} \quad , \quad x \in [0, \pi]$$

Oppgåve 4 (2 poeng)

Løys differensiallikninga

$$y' + 2y = 4 \quad , \quad y(0) = 1$$

Oppgåve 5 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad x \geq 1$$

Flatestykket F er avgrensa av grafen til f, x-aksen, linja $x = 1$ og linja $x = k$, der $k > 1$.

a) Bestem k slik at arealet av F blir 2.

Dersom vi dreier F $360°$ om x-aksen, får vi ein omdreiingslekam med volum V.

b) Bestem V når $k = 4$.

Oppgåve 6 (6 poeng)

Eit plan α inneheld punkta $A(2, 3, -7)$, $B(-2, 1, -3)$ og $C(3, 5, -5)$.

a) Grunngi at $2x - 2y + z + 9 = 0$ er ei likning for planet α.

Ei linje ℓ er definert av dei to punkta $P(3, 1, -2)$ og $Q(6, 3, -4)$.

b) Vis at linja er parallell med planet α.

c) Bestem avstanden frå linja ℓ til planet α.

Oppgåve 7 (8 poeng)

Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x) = 2\cos^2 x + \sin(2x) \quad , \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

a) Bestem nullpunkta til f.

b) Vis at vi kan skrive funksjonsuttrykket til f som

$$f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

c) Bestem toppunkta og botnpunkta på grafen til f.

d) Lag ei skisse av grafen til f.

Oppgåve 8 (4 poeng)

I ei rekkje $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ er $a_2 = 8$ og $a_4 = 2$.

a) Bestem summen av dei seks første ledda i rekkja, dersom ho er aritmetisk.

Det finst to geometriske rekkjer som tilfredsstiller vilkåra ovanfor.

b) Bestem summen av dei seks første ledda i kvar av dei to geometriske rekkjene.

Oppgåve 9 (2 poeng)

Bruk induksjon til å vise at

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

Del 2

Oppgåve 1 (6 poeng)

Maria vil få oversikt over energiforbruket i bustaden sin. Funksjonen f gitt ved

$$f(x)=1{,}3\cdot\sin\left(0{,}52x-2{,}0\right)+2{,}4 \quad , \quad x\in\left[0, 24\right]$$

er ein god modell for energiforbruket per time ved tidspunktet x timar etter midnatt i bustaden til Maria. Her er energiforbruket målt i kWh.

a) Når på døgnet er energiforbruket i bustaden størst ifølgje modellen?

b) Kor stort er energiforbruket i løpet av eit døgn ifølgje modellen?

Ein dag er det straumbrott hos Maria. På energimålaren ser ho at ho dette døgnet hadde brukt 17 kWh før straumbrottet.

c) Omtrent når på døgnet fann straumbrottet stad?

Oppgåve 2 (6 poeng)

Gitt punkta $A(0,7,5)$, $B(1,7,2)$, $C(-2,2,0)$ og $D(1,1,h)$.

- Linja ℓ går gjennom A og B.
- Linja m går gjennom C og D.

a) Bestem ein eksakt verdi for h slik at linjene skjer kvarandre.

Eit plan α er gitt ved likninga

$$3x+(h+9)y+z=68+7h$$

b) Vis at linja ℓ ligg i planet α, og at linja m er parallell med planet α.

c) Bestem h slik at avstanden mellom linjene ℓ og m blir 4.

Oppgåve 3 (6 poeng)

Ein pasient får intravenøs behandling med ein medisin.

La $M(t)$ vere mengda verkestoff frå medisinen som pasienten har i blodet ved tidspunktet t timar etter at behandlinga starta. Kroppen bryt ned verkestoffet med ein fart som til kvar tid er proporsjonal med mengda verkestoff som er i blodet.

Pasienten får tilført $5\,\text{mg}$ av verkestoffet per time.

a) Forklar at $M(t)$ må tilfredsstille differensiallikninga

$$M'(t) = -k \cdot M(t) + 5 \quad , \quad M(0) = 0$$

24 timar etter at behandlinga starta, hadde pasienten $80\,\text{mg}$ av verkestoffet i blodet.

b) Bestem eit uttrykk for $M(t)$.

Etter at pasienten har fått intravenøs behandling i 24 timar, blir det bestemt at pasienten skal få meir medisin per time.

c) Kor mykje verkestoff må pasienten få kvar time dersom mengda verkestoff i blodet skal vere 150 mg eitt døgn seinare?

Oppgåve 4 (6 poeng)

a) Vis at

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

Ei rekkje er gitt ved

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$

b) Bruk resultatet frå oppgåve a) til å grunngi at

$$s_5=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)$$

c) Bruk blant anna det du gjorde i oppgåve a), til å grunngi at

$$s_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

d) Forklar at

$$s_n>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$$

Bruk dette til å grunngi at den uendelege rekkja nedanfor konvergerer.

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler	Del 1: skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. (På del 1 er det ikke tillatt å bruke datamaskin.) Del 2: Etter tre timer er alle hjelpemidler tillatt, bortsett fra åpent Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemidler under eksamen, har du ikke lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måter å utveksle informasjon med andre på er ikke tillatt.
Informasjon om oppgaven	Del 1 har 9 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Poeng i del 1 og del 2 er bare veiledende i vurderingen. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres.
Kilder	Alle andre grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderingen	Se eksamensveiledningen med kjennetegn på måloppnåelse til sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på Utdanningsdirektoratets nettsider.

Del 1

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 3x \cdot \sin x$

b) $g(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\cos x}$

Oppgave 2 (4 poeng)

Bestem integralene

a) $\int (e^x - \sin x)\,dx$

b) $\int_0^{\pi/4} \sin x \cdot \cos x \; dx$

Oppgave 3 (2 poeng)

Løs likningen

$$2\cos(3x) = -\sqrt{3} \quad , \quad x \in [0, \pi]$$

Oppgave 4 (2 poeng)

Løs differensiallikningen

$$y' + 2y = 4 \quad , \quad y(0) = 1$$

Oppgave 5 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad , \quad x \geq 1$$

Flatestykket F er avgrenset av grafen til f, x-aksen, linjen $x=1$ og linjen $x=k$, der $k>1$.

a) Bestem k slik at arealet av F blir 2.

Dersom vi dreier F 360° om x-aksen, får vi et omdreiningslegeme med volum V.

b) Bestem V når $k=4$.

Oppgave 6 (6 poeng)

Et plan α inneholder punktene $A(2,3,-7)$, $B(-2,1,-3)$ og $C(3,5,-5)$.

a) Begrunn at $2x-2y+z+9=0$ er en likning for planet α.

En linje ℓ er definert av de to punktene $P(3,1,-2)$ og $Q(6,3,-4)$.

b) Vis at linjen er parallell med planet α.

c) Bestem avstanden fra linjen ℓ til planet α.

Oppgave 7 (8 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x)=2\cos^2 x+\sin(2x) \quad , \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

a) Bestem nullpunktene til f.

b) Vis at vi kan skrive funksjonsuttrykket til f som

$$f(x)=\sqrt{2}\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$$

c) Bestem toppunktene og bunnpunktene på grafen til f.

d) Lag en skisse av grafen til f.

Oppgave 8 (4 poeng)

I en rekke $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ er $a_2 = 8$ og $a_4 = 2$.

a) Bestem summen av de seks første leddene i rekken, dersom den er aritmetisk.

Det fins to geometriske rekker som tilfredsstiller betingelsene ovenfor.

b) Bestem summen av de seks første leddene i hver av de to geometriske rekkene.

Oppgave 9 (2 poeng)

Bruk induksjon til å vise at

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

der $n \in \mathbb{N}$.

Del 2

Oppgave 1 (6 poeng)

Maria vil få oversikt over energiforbruket i boligen sin. Funksjonen f gitt ved

$$f(x)=1{,}3\cdot\sin(0{,}52x-2{,}0)+2{,}4 \quad , \quad x\in[0,24]$$

er en god modell for energiforbruket per time ved tidspunktet x timer etter midnatt i boligen til Maria. Her er energiforbruket målt i kWh.

a) Når på døgnet er energiforbruket i boligen størst ifølge modellen?

b) Hvor stort er energiforbruket i løpet av et døgn ifølge modellen?

En dag er det strømbrudd hos Maria. På energimåleren ser hun at hun dette døgnet hadde brukt $17\,\text{kWh}$ før strømbruddet.

c) Omtrent når på døgnet fant strømbruddet sted?

Oppgave 2 (6 poeng)

Gitt punktene $A(0,7,5)$, $B(1,7,2)$, $C(-2,2,0)$ og $D(1,1,h)$.

- Linjen ℓ går gjennom A og B.
- Linjen m går gjennom C og D.

a) Bestem en eksakt verdi for h slik at linjene skjærer hverandre.

Et plan α er gitt ved likningen

$$3x+(h+9)y+z=68+7h$$

b) Vis at linjen ℓ ligger i planet α, og at linjen m er parallell med planet α.

c) Bestem h slik at avstanden mellom linjene ℓ og m blir 4.

Oppgave 3 (6 poeng)

En pasient får intravenøs behandling med en medisin.

La $M(t)$ være mengden virkestoff fra medisinen som pasienten har i blodet ved tidspunktet t timer etter at behandlingen startet. Kroppen bryter ned virkestoffet med en fart som til enhver tid er proporsjonal med mengden virkestoff som er i blodet.

Pasienten får tilført $5\,\text{mg}$ av virkestoffet per time.

a) Forklar at $M(t)$ må tilfredsstille differensiallikningen

$$M'(t) = -k \cdot M(t) + 5 \quad , \quad M(0) = 0$$

24 timer etter at behandlingen startet, hadde pasienten $80\,\text{mg}$ av virkestoffet i blodet.

b) Bestem et uttrykk for $M(t)$.

Etter at pasienten har fått intravenøs behandling i 24 timer, blir det bestemt at pasienten skal få mer medisin per time.

c) Hvor mye virkestoff må pasienten få hver time dersom mengden virkestoff i blodet skal være 150 mg ett døgn senere?

Oppgave 4 (6 poeng)

a) Vis at

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

En rekke er gitt ved

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$

b) Bruk resultatet fra oppgave a) til å begrunne at

$$s_5=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)$$

c) Bruk blant annet det du gjorde i oppgave a), til å begrunne at

$$s_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

d) Forklar at

$$s_n>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$$

Bruk dette til å begrunne at den uendelige rekken nedenfor konvergerer.

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!