Utdanningsdirektoratet

Eksamen

20.11.2023

REA3062 Matematikk S2

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timar. Delen utan og delen med hjelpemiddel skal delast ut samstundes. Delen utan hjelpemiddel skal leverast etter 2 timar. Etter 2 timar kan du bruke hjelpemiddel. Delen med hjelpemiddel skal leverast innan 5 timar.
Del utan hjelpemiddel	Vanlege skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar.
Del med hjelpemiddel	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte	Delen utan hjelpemiddel har 5 oppgåver. Delen med hjelpemiddel har 5 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Dersom oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, kan ein alternativ metode gi noko utteljing. Bruk av digitale verktøy skal dokumenterast.
Rettleiing om vurderinga	Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke hensiktsmessige hjelpemiddel – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar – vurderer om svar er rimelege
Om vekting av oppgåvene	Alle deloppgåvene blir vekta likt, bortsett frå oppgåve 5 på del 2, som blir vekta som to deloppgåver.
Andre opplysningar	Teikningar og grafiske framstillingar: Utdanningsdirektoratet

Del 1

Oppgåve 1

Rekn ut integralet

$$\int_{-1}^{1} (x^3 + 2x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Kva fortel svaret deg?

Oppgåve 2

Ei uendeleg geometrisk rekkje $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ konvergerer mot 8.

a) Bestem summen av dei fire første ledda, når du får vite at $a_1 = 4$.

I ei aritmetisk rekkje er $a_1 + a_4 + a_7 = 114$.

b) Bestem a_4.

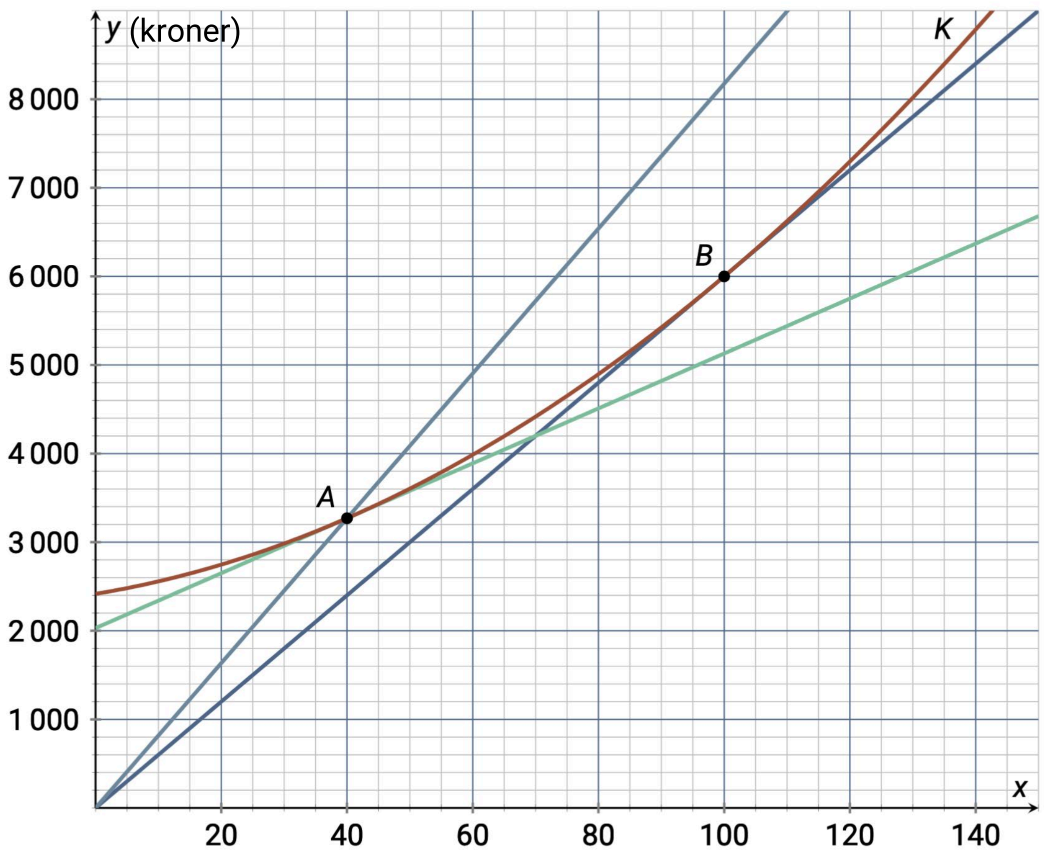
Oppgåve 3

I koordinatsystemet nedanfor ser du grafen til ein kostnadsfunksjon K saman med tre rette linjer.

Dei tre rette linjene er grafane til funksjonane f, g og h, der

$$f(x) = 31x + 2030$$
$$g(x) = 60x$$
$$h(x) = 81{,}75x$$

To av linjene tangerer grafen til K. Vi kallar tangeringspunkta A og B.



a) Bestem einingskostnaden ved produksjon av 40 einingar.

b) Forklar at grensekostnaden ved produksjon av 40 einingar er 31 kroner.

c) Bestem den minste einingskostnaden.

Oppgåve 4

Ein elev har skrive koden nedanfor.

```python
N = 1000
start = -2
slutt = 2
dx = (slutt - start)/N

def f(x):
    return x**2-1

S = 0
for i in range(N):
    xi = start + i*dx
    S = S + abs(f(xi))*dx  # abs(f(x)) gir absoluttverdien til f(x)

print(S)
```

a) Forklar kva eleven ønskjer å rekne ut med denne koden.

b) Finn ved rekning den verdien eleven ønskjer å bestemme.

Oppgåve 5

I ein kasse ligg det tre typar kuler. Desse veg høvesvis 4 kg, 5 kg og 10 kg. Dersom vi trekkjer tilfeldig ei kule, er sannsynet $\frac{1}{4}$ for at kula veg 4 kg, og $\frac{1}{2}$ for at ho veg 5 kg.

Vi lar X vere vekta til ei tilfeldig kule.

a) Vis at $E(X) = 6\,\text{kg}$. Rekn ut variansen til X.

Vi trekkjer tilfeldig ei kule og legg ho tilbake igjen. Dette gjer vi to gonger. La X_1 vere vekta til den første kula vi trekkjer, og X_2 vekta til den andre kula vi trekkjer. La $Y = X_1 + X_2$.

b) Set opp sannsynsfordelinga til Y.

c) Bestem $P(Y > 10)$.

Del 2

Oppgåve 1

Tabellen nedanfor viser den daglege etterspurnaden etter ei vare for ulike prisar.

Pris (kroner)	10	20	30	40	50
Etterspurnad	237	111	49	22	12

a) Lag ein modell q som kan brukast til å beskrive samanhengen mellom prisen p (i kroner) og den daglege etterspurnaden. Vurder gyldigheitsområdet til modellen.

b) Kva bør prisen for vara vere dersom bedrifta skal selje 70 einingar per dag?

For ei anna vare viser det seg at

$$p = 79 - 12{,}2 \ln x \, .$$

Her er x den daglege etterspurnaden når vara kostar p kroner.

c) Kva må prisen vere dersom inntektene skal bli størst mogleg?

Kostnadene K (i kroner) ved produksjon og sal av x einingar per dag er gitt ved

$$K(x) = 0{,}021x^2 + 10x + 910 \, .$$

d) Kor mange einingar må produserast og seljast per dag for at grenseinntektene skal bli lik grensekostnadene?

Gi ei praktisk tolking av svaret.

Oppgåve 2

Miriam har bestemt seg for å setje inn 20 000 kroner på ein konto i begynninga av kvart år. Det første sparebeløpet vil ho setje inn i begynninga av 2024, det andre beløpet i begynninga av 2025, og så vidare. Anta at ho får ein fast årleg rentesats på 3,5 prosent.

a) Vis at Miriam vil ha 565 594 kroner på kontoen like etter at ho har sett inn innskot nummer 20.

Hermod har òg bestemt seg for å spare. Han vil setje inn eit fast beløp i begynninga av kvart år. Det første sparebeløpet set han inn i begynninga av 2024. Han får òg ein fast årleg rentesats på 3,5 prosent. Hermod har rekna ut at han vil ha 692 852 kroner på kontoen like etter at innskot nummer 20 er sett inn.

b) Bestem beløpet Hermod må setje inn kvart år for at dette skal stemme.

Miriam ønskjer at det skal vere 1 000 000 kroner på kontoen like etter at ho har sett inn innskot nummer 20. For å få til dette, vil ho auke innskotet med eit fast beløp kvart år. Første innskot skal vere 20 000 kroner.

c) Kor mykje må ho auke innskotet med kvart år?

Oppgåve 3

Ein dekkprodusent påstår at bremselengda for ein type vinterdekk under bestemte forhold er 83 meter.

La X vere bremselengda ved ei tilfeldig måling under desse forholda.
Gå ut frå at X er normalfordelt med $\mu = 83\text{m}$ og $\sigma = 3{,}0\text{m}$.

a) Bestem sannsynet for at bremselengda ved ei tilfeldig vald måling er lengre enn 87 meter.

b) Bestem k slik at $P(X < k) = 0{,}9$. Gi ei praktisk tolking av svaret.

c) Bestem sannsynet for at gjennomsnittet av 15 målingar er mindre enn 84 meter.

Nokon meiner at bremselengda er lengre enn 83 meter. Dei ville derfor gjennomføre ein test under dei same bestemte forholda, for å sjekke om det er hald i påstanden til dekkprodusenten.

Det blei gjennomført 15 målingar. Resultatet av målingane (i meter) er gitt i tabellen nedanfor.

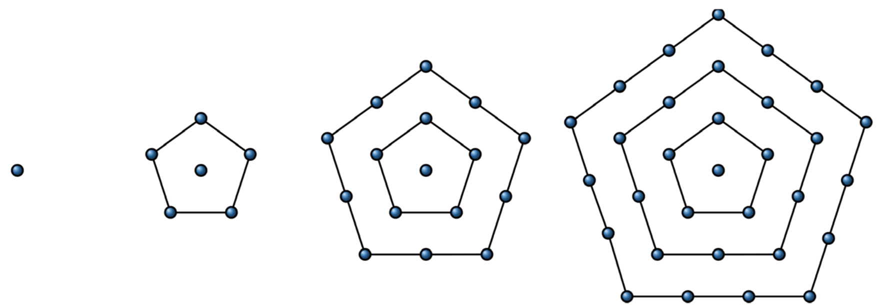
86,4	85,5	82,9	81,9	84,0
86,4	82,3	85,9	77,7	83,0
86,9	88,3	86,2	80,5	84,8

d) Gjennomfør ein hypotesetest med eit signifikansnivå på 5 prosent til å avgjere om det er hald i mistanken.

Oppgåve 4

Kvar figur nedanfor består av kuler plasserte på pentagonar. Talet på kuler på kvar av ytterkantane aukar med éin samanlikna med talet på kuler på ytterkanten i figuren før. La P_n vere talet på kuler i figur n.

Dei fem første figurtala er 1, 6, 16, 31 og 51.



Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4

a) Beskriv ein rekursiv samanheng mellom P_n og P_{n-1}.

b) Lag eit program som reknar ut P_{100} ved å bruke den rekursive samanhengen du fann i oppgåve a).

Oppgåve 5

Høgda X til ei tilfeldig vald jente på 24 månader er tilnærma normalfordelt med forventningsverdi $E(X) = 87$ cm og standardavvik $SD(X) = 3{,}3$ cm.

Høgda Y til ein tilfeldig vald gut på 24 månader er tilnærma normalfordelt med forventningsverdi $E(Y) = 88$ cm og standardavvik $SD(Y) = 3{,}1$ cm.

Lag eit program som du kan bruke til å anslå sannsynet for at høgda til eit tilfeldig valt barn på 24 månader er mindre enn 84 cm. Gå ut ifrå at det er like mange jenter som gutar i populasjonen.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer. Delen uten og delen med hjelpemidler skal deles ut samtidig. Delen uten hjelpemidler skal leveres etter 2 timer. Etter 2 timer kan du bruke hjelpemidler. Delen med hjelpemidler skal leveres innen 5 timer.
Del uten hjelpemidler	Vanlige skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler.
Del med hjelpemidler	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte	Delen uten hjelpemidler har 5 oppgaver. Delen med hjelpemidler har 5 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi noe uttelling. Bruk av digitale verktøy skal dokumenteres.
Veiledning om vurderingen	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger – vurderer om svar er rimelige
Om vekting av oppgavene	Alle deloppgavene vektes likt, med unntak av oppgave 5 på del 2, som vektes som to deloppgaver.
Andre opplysninger	Tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

Del 1

Oppgave 1

Regn ut integralet

$$\int_{-1}^{1} (x^3 + 2x)\,\mathrm{d}x \, .$$

Hva forteller svaret deg?

Oppgave 2

En uendelig geometrisk rekke $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ konvergerer mot 8.

a) Bestem summen av de fire første leddene, når du får vite at $a_1 = 4$.

I en aritmetisk rekke er $a_1 + a_4 + a_7 = 114$.

b) Bestem a_4 .

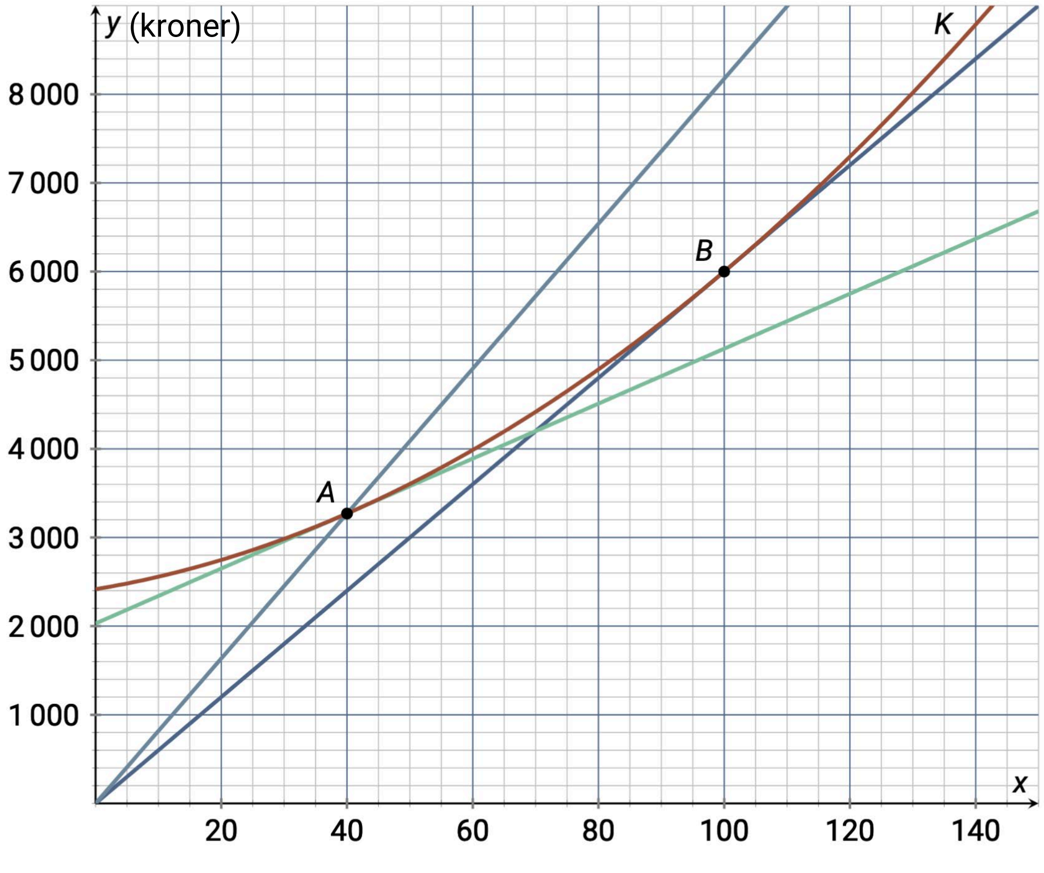
Oppgave 3

I koordinatsystemet nedenfor ser du grafen til en kostnadsfunksjon *K* sammen med tre rette linjer.

De tre rette linjene er grafene til funksjonene *f*, *g* og *h*, der

$$f(x) = 31x + 2030$$
$$g(x) = 60x$$
$$h(x) = 81{,}75x$$

To av linjene tangerer grafen til *K*. Vi kaller tangeringspunktene *A* og *B*.



a) Bestem enhetskostnaden ved produksjon av 40 enheter.

b) Forklar at grensekostnaden ved produksjon av 40 enheter er 31 kroner.

c) Bestem den minste enhetskostnaden.

Oppgave 4

En elev har skrevet koden nedenfor.

```
N = 1000
start = -2
slutt = 2
dx = (slutt - start)/N

def f(x):
    return x**2-1

S = 0
for i in range(N):
    xi = start + i*dx
    S = S + abs(f(xi))*dx  # abs(f(x)) gir absoluttverdien til f(x)

print(S)
```

a) Forklar hva eleven ønsker å regne ut med denne koden.

b) Finn ved regning den verdien eleven ønsker å bestemme.

Oppgave 5

I en kasse ligger det tre typer kuler. Disse veier henholdsvis 4 kg, 5 kg og 10 kg. Dersom vi trekker tilfeldig en kule, er sannsynligheten $\frac{1}{4}$ for at kulen veier 4 kg og $\frac{1}{2}$ for at den veier 5 kg.

Vi lar X være vekten til en tilfeldig kule.

a) Vis at $E(X) = 6\,\text{kg}$. Regn ut variansen til X.

Vi trekker tilfeldig en kule og legger den tilbake igjen. Dette gjør vi to ganger. La X_1 være vekten til den første kulen vi trekker, og X_2 vekten til den andre kulen vi trekker. La $Y = X_1 + X_2$.

b) Sett opp sannsynlighetsfordelingen til Y.

c) Bestem $P(Y > 10)$.

Del 2

Oppgave 1

Tabellen nedenfor viser den daglige etterspørselen etter en vare for ulike priser.

Pris (kroner)	10	20	30	40	50
Etterspørsel	237	111	49	22	12

a) Lag en modell q som kan brukes til å beskrive sammenhengen mellom prisen p (i kroner) og den daglige etterspørselen. Vurder gyldighetsområdet til modellen.

b) Hva bør prisen for varen være dersom bedriften skal selge 70 enheter per dag?

For en annen vare viser det seg at

$$p = 79 - 12{,}2 \ln x \, .$$

Her er x den daglige etterspørselen når varen koster p kroner.

c) Hva må prisen være dersom inntektene skal bli størst mulig?

Kostnadene K (i kroner) ved produksjon og salg av x enheter per dag er gitt ved

$$K(x) = 0{,}021x^2 + 10x + 910 \, .$$

d) Hvor mange enheter må produseres og selges per dag for at grenseinntektene skal bli lik grensekostnadene?

Gi en praktisk tolkning av svaret.

Oppgave 2

Miriam har bestemt seg for å sette inn 20 000 kroner på en konto i begynnelsen av hvert år. Det første sparebeløpet vil hun sette inn i begynnelsen av 2024, det andre beløpet i begynnelsen av 2025, og så videre. Anta at hun får en fast årlig rentesats på 3,5 prosent.

a) Vis at Miriam vil ha 565 594 kroner på kontoen like etter at hun har satt inn innskudd nummer 20.

Hermod har også bestemt seg for å spare. Han vil sette inn et fast beløp i begynnelsen av hvert år. Det første sparebeløpet setter han inn i begynnelsen av 2024. Han får også en fast årlig rentesats på 3,5 prosent. Hermod har regnet ut at han vil ha 692 852 kroner på kontoen like etter at innskudd nummer 20 er satt inn.

b) Bestem beløpet Hermod må sette inn hvert år for at dette skal stemme.

Miriam ønsker at det skal være 1 000 000 kroner på kontoen like etter at hun har satt inn innskudd nummer 20. For å få til dette, vil hun øke innskuddet med et fast beløp hvert år. Første innskudd skal være 20 000 kroner.

c) Hvor mye må hun øke innskuddet med hvert år?

Oppgave 3

En dekkprodusent påstår at bremselengden for en type vinterdekk under bestemte forhold er 83 meter.

La X være bremselengden ved en tilfeldig måling under disse forholdene.
Gå ut fra at X er normalfordelt med $\mu = 83\text{m}$ og $\sigma = 3{,}0\text{m}$.

a) Bestem sannsynligheten for at bremselengden ved en tilfeldig valgt måling er lengre enn 87 meter.

b) Bestem k slik at $P(X < k) = 0{,}9$. Gi en praktisk tolkning av svaret.

c) Bestem sannsynligheten for at gjennomsnittet av 15 målinger er mindre enn 84 meter.

Noen mener at bremselengden er lengre enn 83 meter. De ville derfor gjennomføre en test under de samme bestemte forholdene, for å sjekke om det er hold i dekkprodusentens påstand.

Det ble gjennomført 15 målinger. Resultatet av målingene (i meter) er gitt i tabellen nedenfor.

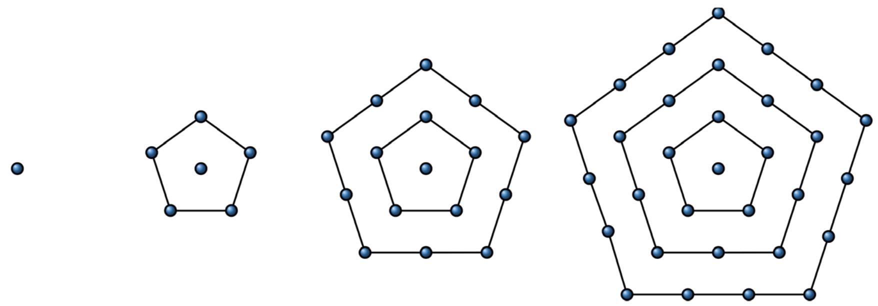
86,4	85,5	82,9	81,9	84,0
86,4	82,3	85,9	77,7	83,0
86,9	88,3	86,2	80,5	84,8

d) Gjennomfør en hypotesetest med et signifikansnivå på 5 prosent til å avgjøre om det er hold i mistanken.

Oppgave 4

Hver figur nedenfor består av kuler plassert på pentagoner. Antall kuler på hver av ytterkantene øker med én sammenlignet med antall kuler på ytterkanten i figuren før. La P_n være antall kuler i figur n.

De fem første figurtallene er 1, 6, 16, 31 og 51.



Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4

a) Beskriv en rekursiv sammenheng mellom P_n og P_{n-1}.

b) Lag et program som regner ut P_{100} ved å bruke den rekursive sammenhengen du fant i oppgave a).

Oppgave 5

Høyden X til en tilfeldig valgt jente på 24 måneder er tilnærmet normalfordelt med forventningsverdi $\mathrm{E}(X) = 87$ cm og standardavvik $\mathrm{SD}(X) = 3{,}3$ cm.

Høyden Y til en tilfeldig valgt gutt på 24 måneder er tilnærmet normalfordelt med forventningsverdi $\mathrm{E}(Y) = 88$ cm og standardavvik $\mathrm{SD}(Y) = 3{,}1$ cm.

Lag et program som du kan bruke til å anslå sannsynligheten for at høyden til et tilfeldig valgt barn på 24 måneder er mindre enn 84 cm. Gå ut ifra at det er like mange jenter som gutter i populasjonen.

Utdannings-
direktoratet

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!