

Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x + 3$

2) $g(x) = 2xe^{3x}$

b)

1) Finn summen av den uendelige rekka: $9 + 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots$

2) Finn summen av de 119 første naturlige tallene.

c) Ledd nummer n i en rekke er gitt ved $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

1) Bestem a_5 og S_5 .

2) Vis at $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Bestem S_{999} .

d) Vis at $x = 1$ er en løsning på likningen $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$. Bruk polynomdivisjon til å finne de to andre løsningene.

e) Løs likningssettet

$$x + y + z = 1$$

$$3x - y + 2z = 7$$

$$4x + 3y - z = 10$$

f) En maskin som lager terninger, var feilinnstilt. Terningene fikk to treere og ingen seksere.

1) Skriv av tabellen og fyll ut sannsynlighetsfordelingen:

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$					

2) Regn ut $E(X)$ og $Var(X)$.

g) Totalkostnaden i kroner for en vare er gitt ved $K(x) = x^2 - 2x + 4$ der x er antall produserte enheter.

1) Finn et uttrykk for enhetskostnaden og grensekostnaden.

2) Finn den minste enhetskostnaden.

En regel i økonomien sier at vi finner den laveste verdien for enhetskostnaden der grafen til enhetskostnaden og grafen til grensekostnaden skjærer hverandre.

3) Vis at denne regelen alltid gjelder.

Del 2

Oppgave 2

En bedrift har lagt opp en langsiktig plan for å rekruttere kvalifisert arbeidskraft i framtida. Bedriften lover en stipendordning under skolegang og studier. De ferdigutdannede studentene må forplikte seg til å arbeide i bedriften i 5 år.

En elev/student kan velge mellom å få stipendet

- utbetalt 48 000 kr hvert år i 10 år. Første utbetaling om 1 år.
 - utbetalt 105 000 kr kontant i dag. Deretter 45 000 kr hvert år i 5 år, første utbetaling om 1 år.
 - utbetalt 60 000 kr hvert år i 10 år. Første utbetaling om 5 år.
- a) Hvilken stipendordning er mest lønnsom for eleven/studenten når renten er 5 % per år? Bruk det du kan om rekker i begrunnelsen din.
- b) Ville konklusjonen blitt annerledes hvis renten hadde vært 8 % per år?

Oppgave 3 – Alternativ I

Gitt funksjonen

$$f(x) = 10 \cdot (1 - x) \cdot e^{-x} \quad x \in [0, 10]$$

- Vis at $f'(x) = 10 \cdot (x - 2) \cdot e^{-x}$. Tegn et fortegnskjema for $f'(x)$ og bruk det til å finne eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f .
- Finn $f''(x)$. Tegn et fortegnskjema for $f''(x)$ og bruk det til å finne eventuelle vendepunkt på grafen til f .
- Tegn en skisse av grafen til f .
- Finn det samlede arealet som er avgrenset av grafen til f , x -aksen og linjene $x = 0$ og $x = 10$.

Funksjonen f er en derivert til funksjonen g .

- Bruk grafen til f til å bestemme hvor grafen til g stiger og hvor den synker. Finn x -verdiene til eventuelle topp-, bunn- og vendepunkter på grafen til g .

Oppgave 3 – Alternativ II

Ifølge data fra Statistisk årbok kan antall registrerte personbiler per 1000 innbyggere i Norge i perioden 1985 – 2005 uttrykkes ved funksjonen

$$f(x) = 506,8 - \frac{4,725 \cdot 10^4}{1,513^x + 525,7} \quad x \in [0, 20]$$

der x er antall år etter 1985.

I 1991 var det 4 500 000 innbyggere i Norge.

- Hvor mange registrerte personbiler var det i Norge i 1991?
- Tegn en skisse av grafen til f' .
- Bruk grafen til f' til å finne interessante egenskaper for f .
- Når øker antall registrerte personbiler per 1000 innbyggere med 6 per år?

Gjennomsnittet til funksjonen f i intervallet $[a, b]$ er $\frac{1}{b-a} \cdot A$, der A er arealet avgrenset av grafen til f , x -aksen og linjene $x = a$ og $x = b$.

- Finn gjennomsnittlig antall registrerte personbiler per 1000 innbyggere i perioden 1985 – 2005.

Oppgave 4

Levetiden til en spesiell motor antas å være normalfordelt med en forventningsverdi på 10 år og et standardavvik på 2 år.

- a) Finn sannsynligheten for at
- 1) motoren fungerer mindre enn 8 år
 - 2) motoren fungerer mellom 8 og 11 år

Motorer som blir defekte før garantitiden går ut, blir erstattet av produsenten. Firmaet som produserer motorene, ønsker ikke å erstatte mer enn 3 % av de motorene som blir defekte.

- b) Hvor lang garantitid bør de da tilby?

I firmaet er de usikre på om forventet levetid er så lang som 10 år. De registrerer levetiden i antall år på 10 tilfeldig valgte motorer:

8,3 9,2 7,3 10,1 9,5 8,7 8,4 10,0 9,1 9,4

De antar fortsatt at levetiden til motoren er normalfordelt med standardavvik på 2 år.

- c) Still opp en nullhypotese H_0 og en alternativ hypotese H_1 for denne problemstillingen.
- d) Velg et signifikansnivå på 5 % og undersøk om firmaet må forkaste hypotesen H_0 .