Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonene:

1) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

2) $g(x) = 3 \cdot e^{x^2}$

b) Gitt den uendelige rekken

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Avgjør om rekken konvergerer, og bestem eventuelt summen av rekken.

c) Sannsynlighetsfordelingen til en stokastisk variabel X er gitt ved

x	-3	0	1	B
$P(X = x)$	0,2	0,1	A	0,3

Du får opplyst at $B > 1$

1) Bestem A og $P(X < 1)$

2) Bestem B når du får opplyst at $E(X) = 1{,}0$

3) Vis at variansen er $\text{Var}(X) = 6{,}0$

d) Vi har gitt funksjonen $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6$

1) Vis at $f(x)$ er delelig med $(x+1)$

2) Løs likningen $f(x) = 0$

e) En polynomfunksjon f av andre grad er gitt ved

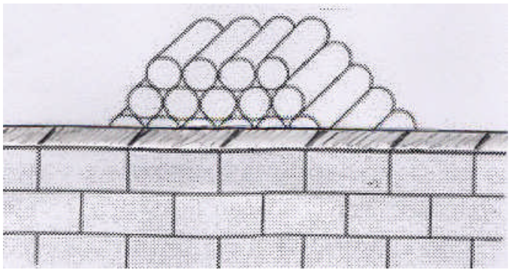
$$f(x) = a x^2 + b x + c$$

Du får oppgitt at: $f(2) = -4$, $f'(2) = 0$ og $f''(2) = 8$.

1) Bestem funksjonsuttrykket til f .

2) Finn nullpunktene til f og eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f .

f)



En stabel med aluminiumsrør ligger delvis skjult bak en murvegg.

1) La antall rør i rad nummer n ovenfra være a_n . Ta utgangspunkt i tegningen og forklar at

$$a_n = n + 3 \qquad \text{når} \quad n \geq 1$$

2) Vis at antall rør til sammen i de n øverste radene er gitt ved

$$S_n = \frac{7n + n^2}{2}$$

3) Hvor mange rader trengs for å få plass til 225 rør?
(Du kan få bruk for at $\sqrt{1849} = 43$.)

Del 2

Oppgave 2

Signe bestemmer seg for å spare penger. Hun vil sette inn 30 000 kroner på en bankkonto i begynnelsen av hvert år. Det første beløpet skal settes inn om ett år. Renten er 4 % per år i hele spareperioden.

a) Hvor mye penger har Signe på kontoen rett etter at hun har satt inn det åttende beløpet?

b) Finn ved regning hvor lenge Signe må spare for at det skal stå 400 000 kroner på kontoen.

c) Signe ønsker å ha 400 000 kroner på kontoen like etter at hun har satt inn det åttende beløpet. Finn ved regning hvor mye Signe i så fall må sette inn på kontoen hvert år.

Oppgave 3

En stokastisk variabel X er normalfordelt med $\mu = 30$ og $\sigma = 2,5$.

a) Bestem $\mathrm{P}(X \leq 31)$

b) Bestem $\mathrm{P}(X > 28)$

Oppgave 4

En grossist som selger jordbær, har over tid registrert at 10 % av jordbærkassene inneholder bær som er ødelagt. En dag mottar grossisten 50 kasser. Vi antar at 10 % av kassene inneholder bær som er ødelagt.

a) Hva er sannsynligheten for at akkurat 5 av kassene har ødelagte bær?

b) Finn sannsynligheten for at minst 5 kasser inneholder ødelagte bær.

Grossisten får mistanke om at mer enn 10 % av kassene inneholder ødelagte bær. For å undersøke forholdet nærmere kontrollerer han 90 kasser. Ved denne kontrollen viser det seg at 15 av de 90 kassene inneholder bær som er ødelagt.

Vi lar p være sannsynligheten for at en tilfeldig valgt kasse inneholder ødelagte bær.

c) Sett opp en nullhypotese og en alternativ hypotese som passer til denne problemstillingen. Forklar hvordan du har tenkt.

d) Undersøk om resultatet av kontrollen gir grunnlag for å si at kvaliteten på jordbærene har blitt dårligere. Velg et signifikansnivå på 5 %.

Oppgave 5

Vi har gitt andregradsfunksjonen

$$f(x) = 10x^2 - 2000x + 100\,000$$

a) Bestem $f'(x)$. Regn ut $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ og $f'(3)$.

b) Forklar at rekken $f'(0) + f'(1) + f'(2) + f'(3) + \cdots$ er en aritmetisk rekke der første ledd er $a_1 = -2000$ og differensen er $d = 20$.

c) Vis at summen av de n første leddene er gitt ved uttrykket

$$S_n = 10 \cdot n^2 - 2010 \cdot n$$

I et land ble det et år født $100\,000$ barn. Etter x år er antall gjenlevende i dette kullet gitt ved modellen

$$f(x) = 10x^2 - 2000x + 100\,000 \quad \text{når} \quad x \in [0, 100]$$

d) Regn ut $S_{100} = f'(0) + f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(99)$.

Tolk svaret du kommer fram til.

Oppgave 6

Du skal svare på enten alternativ I eller alternativ II.
De to alternativene teller like mye ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen din inneholder deler av begge alternativene, vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

Ved produksjon av en vare er etterspørselen $E(p)$ enheter per uke uttrykt ved

$$E(p) = -0,5p + 80 \qquad p \in [10, 70]$$

Prisen p per enhet er gitt i kroner.

Inntektene per uke kan uttrykkes ved funksjonen $I(p)$. Produksjonen legges opp slik at det produseres like mange enheter som det selges. Kostnadene knyttet til produksjonen er gitt ved funksjonen

$$K(x) = 8x^2 - 1200x + 45600$$

der $x = E(p)$ er antall produserte og solgte enheter.

a) Vis at funksjonsuttrykkene til $I(p)$ og $K(p)$ er gitt ved

$$I(p) = -0,5p^2 + 80p$$
$$K(p) = 2p^2 - 40p + 800$$

b) Hvilken pris gir størst overskudd?

c) Hvor mange enheter per uke produseres det når overskuddet er størst?

Ved produksjon av en annen vare er etterspørselen per uke gitt ved

$$g(x) = 200 \cdot e^{0,02x} \qquad x \in [1, 26]$$

$x = 1$ betyr uke nr. 1, og $x = 2$ betyr uke nr. 2 i produksjonstiden osv.
Også for denne varen produseres det like mange enheter per uke som det selges.

d) Tegn grafen til g. I hvilken uke er etterspørselen 270 enheter? Finn svaret både grafisk og ved regning.

e) Hvor mange enheter produseres det i løpet av det halve året?

Alternativ II

En bedrift produserer x enheter per dag av en vare. De samlede kostnadene per dag kan beskrives ved funksjonen

$$K(x) = 1000 + \frac{8000}{1 + 70 \cdot e^{-0{,}15x}} \quad , \qquad x < 60$$

Kostnadene er gitt i kroner.

a) Tegn grafen til K.

b) Vis ved regning at uttrykket for grensekostnaden kan skrives

$$K'(x) = \frac{84\,000 \cdot e^{-0{,}15x}}{(1 + 70 \cdot e^{-0{,}15x})^2}$$

Bestem $K'(20)$ og forklar hva dette tallet forteller.

c) Undersøk hvilken produksjonsmengde som gir størst grensekostnad.
Finn den største grensekostnaden.

Vi går ut fra at hele produksjonen blir solgt, og at samlet inntekt ved salg av x enheter er

$$I(x) = 220x - x^2$$

d) Tegn grafen til I i samme koordinatsystem som grafen til K. Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge per dag for at overskuddet skal bli størst mulig?

Bedriften eksperimenterer med ulike modeller for inntektsfunksjonen. De tenker seg at samlet inntekt ved salg av x enheter alltid kan beskrives ved et uttrykk på formen

$$h(x) = ax - x^2 \quad , \qquad \text{der } a \text{ er en positiv konstant.}$$

e) Er det mulig å oppnå overskudd hvis $a = 120$?
Hva er den minste verdien a kan ha dersom bedriften skal gå med overskudd?