DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (24 poeng)

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = x^3 + 2x + 3$

2) $g(x) = 2x^2 \cdot e^{2x}$

3) $h(x) = 3x \cdot \ln(2x)$

b) Vi har gitt rekkene

1) $2+4+6+8+10+\cdots$	Bruk formelen for S_n til å bestemme S_{10}
2) $2+5+8+\cdots+89$	Bruk formler og bestem summen til rekken.
3) $1+2+4+8+\cdots$	Bruk formelen for S_n til å bestemme S_8
4) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$	Bestem summen til den uendelige rekken.

c) Gitt funksjonen

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 \quad , \quad x \in \langle -1, 2 \rangle$$

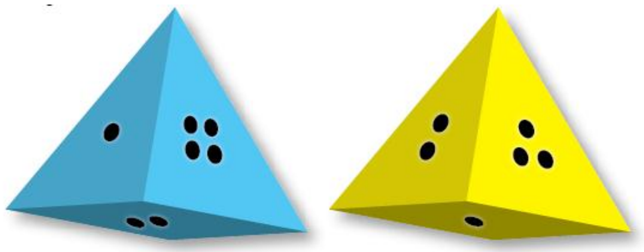
1) Løs likningen $f(x) = 0$

2) Bestem $f'(x)$, og tegn fortegnslinjen til den deriverte.

3) Bruk fortegnslinjen i 2) til å finne eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til *f*.

4) Tegn en skisse av grafen til *f*.

d) Overflaten til et tetraeder består av fire likesidede trekanter. De ulike sidene er markert med henholdsvis 1, 2, 3 og 4 øyne.



Kilde: Utdanningsdirektoratet

Vi kaster to slike «terninger».

La X være summen av antall øyne på de to sidene som vender ned.

1) Skriv av og fyll ut tabellen:

x	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = x)$					$\frac{3}{16}$		

2) Bestem forventningsverdien $E(X)$.

e) En buss stoppet tre steder på en rute. På første holdeplass kom det på ti barn, fire voksne og tre pensjonister. Til sammen betalte disse 225 kroner. På neste stoppested kom det på åtte barn, tre voksne og to pensjonister. Disse betalte til sammen 170 kroner. På siste holdeplass kom det på ni barn, fire voksne og tre pensjonister. Disse betalte til sammen 215 kroner.

Sett opp og løs et likningssystem, og bestem billettprisen for barn, voksne og pensjonister.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 2 (5 poeng)

Tall som kan skrives på formen $T_n = 1+2+3+4+\cdots+n$, kalles for trekanttall.

a) Skriv opp de fem første trekanttallene.

Vi organiserer oddetallene i en talltrekant slik tabellen nedenfor viser.

n	a_n	a_n	a_n	S_n	S_n
1	1	1		1	
2	3 + 5	8		9	3^2
3	7 + 9 + 11	27	3^3	36	
4	13 + 15 + 17 + 19			100	
5	21 + 23 + 25 + 27 + 29				15^2

b) Skriv av og fyll ut tabellen.
Bruk mønsteret som framkommer, til å finne en formel for a_n .

c) Bruk mønsteret til å forklare at vi kan skrive

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$$

Oppgave 3 (8 poeng)

Line arver 100 000 kroner og vil spare pengene til en ny bil. I begynnelsen av et år setter hun dette beløpet på en konto med fast årlig rente på 4,5 %. I tillegg bestemmer hun seg for å sette 12 000 kroner inn på kontoen i begynnelsen av hvert av de neste årene.

a) Hvor mye penger står det på kontoen etter 3 år?

b) Hvor mange år må hun spare dersom det skal stå 200 000 kroner på kontoen?

c) For å få råd til «drømmebilen» må hun likevel låne 150 000 kroner til en rente på 6,0 % per år. Hun vil bruke 5 år på å betale ned lånet. Det første avdraget betaler hun ett år etter låneopptaket.

Hvor mye må hun betale hvert år?

d) Line synes at det årlige beløpet blir altfor høyt. Hun vil betale halvparten så mye hvert år.

Hvor lang tid tar det før lånet da er nedbetalt, dersom renten fortsatt er 6,0 % per år?

Oppgave 4 (8 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x)=\frac{1000}{10+e^{(3{,}912-0{,}5x)}} \qquad x\geq 0$$

a) Vis ved regning at $f(x)$ kan skrives på formen $f(x)=\dfrac{100}{1+5{,}0\cdot e^{-0{,}5x}}$

Funksjonsverdiene til f er antall individer som har, eller har hatt, en sykdom x dager etter at sykdommen ble registrert første gang.

b) Bestem hvor mange som hadde sykdommen da den ble registrert første gang, ifølge denne modellen.

c) Tegn grafen til f. Hvor mange individer vil få sykdommen i det lange løp?

d) Bestem hvor mange som fikk sykdommen den sjette dagen etter at sykdommen ble registrert første gang.

Oppgave 5 (7 poeng)

PISA er en internasjonal undersøkelse som blir gjennomført hvert tredje år blant skoleelever i en rekke land. Ved undersøkelsen i 2009 var det med 4 700 elever fra Norge. I naturfag scoret de norske elevene gjennomsnittlig 500 poeng. Det var nøyaktig likt det internasjonale gjennomsnittet. Standardavviket for norske elever var 90 poeng.

Vi trekker tilfeldig ut en elev blant de norske deltakerne. I oppgavene a) og b) kan du regne med at poengsummen til eleven er normalfordelt med forventningsverdi 500 poeng og standardavvik 90 poeng.

a) Bestem sannsynligheten for at eleven scoret minst 650 poeng.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven scoret mellom 475 og 535 poeng.

I virkeligheten kjenner vi ikke forventet poengsum for norske elever. Vi vet bare at gjennomsnittet var 500 poeng for de 4 700 elevene som var med i undersøkelsen.

c) Er det grunnlag for å si at norske elever var bedre enn elever fra land som scoret 495 poeng? Velg selv signifikansnivå.

Oppgave 6 (8 poeng)

Kilde: forum.vccn.no (10.12.2011)

En bil kjører x km i løpet av t timer, der x er gitt ved

$$x(t) = 80t + 30 \cdot e^{-0,4t} - 30$$

a) Hvor langt kjører bilen i løpet av den første halvtimen?

b) Bruk digitalt verktøy, og bestem hvor lang tid bilen bruker på de første 500 km.

Det samlede bensinforbruket b etter å ha kjørt x km er gitt ved

$$b(x) = 0,07 \cdot x \cdot (1 + e^{-0,5x})$$

der $b(x)$ er målt i liter.

c) Bestem $b'(x)$. Forklar hvilke derivasjonsregler du har brukt.
Hva er den praktiske betydningen av tallet $b'(10)$?

Det kan vises at bensinforbruket f målt i liter per time etter t timer er

$$f(t) = b'(x) \cdot x'(t)$$

d) Bestem bensinforbruket per minutt når bilen har kjørt i en halv time.