# DEL 1
## Uten hjelpemidler

### Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = x \cdot e^{2x}$

b) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2-3}$

### Oppgave 2 (4 poeng)

a) Forkort brøken ved å bruke polynomdivisjon

$$\frac{x^3-1}{x-1}$$

b) Bestem tallet $a$ slik at divisjonen går opp

$$(x^2-2x+a):(x-3)$$

c) Bestem tallet $b$ slik at divisjonen går opp

$$(x^2-3x-4):(x-b)$$

### Oppgave 3 (2 poeng)

Det $n$-te leddet i en geometrisk rekke er gitt ved

$$a_n = 11 \cdot (-0{,}1)^{n-1}$$

Forklar at rekken er konvergent. Hva blir summen?

## Oppgave 4 (3 poeng)

Løs likningssystemet

$$\begin{bmatrix} x+y-z=13 \\ 2x+y+z=27 \\ x-3y-2z=-9 \end{bmatrix}$$

## Oppgave 5 (5 poeng)

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$$

a) Bruk $f'(x)$ til å bestemme eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til $f$.

b) Bruk $f''(x)$ til å bestemme eventuelle vendepunkter på grafen til $f$.

c) Lag en skisse av grafen til $f$.

## Oppgave 6 (3 poeng)

Sannsynlighetsfordelingen for en stokastisk variabel $X$ er gitt ved følgende tabell:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $2p$ | $p$ | $3p$ | 0,3 | $p$ |

a) Forklar hvorfor $p=0{,}1$.

b) Bestem $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.

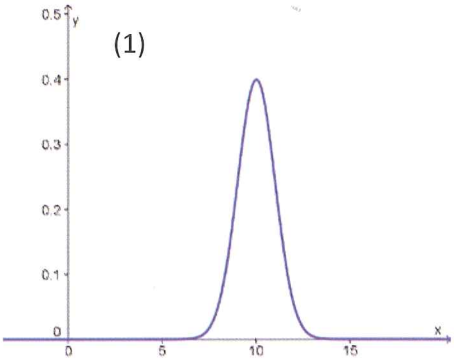
## **Oppgave 7** (4 poeng)

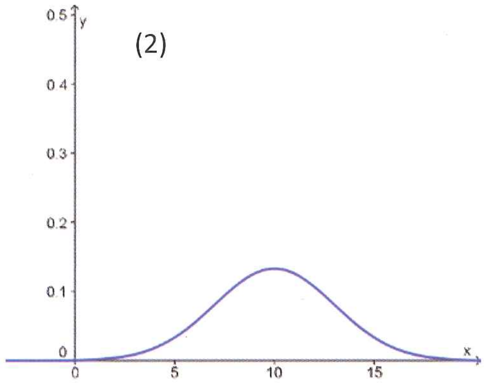
Vi har gitt fire stokastiske variabler $X_1$, $X_2$, $X_3$ og $X_4$ som alle er normalfordelte.
Forventningsverdien E og standardavviket SD for disse er

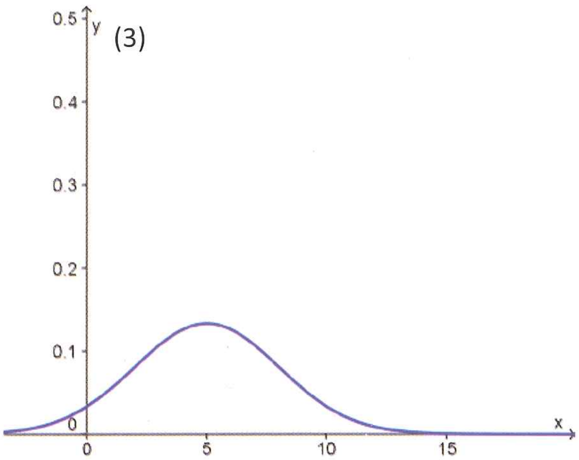
$\mathrm{E}(X_1)=5$ og $\mathrm{SD}(X_1)=1$ $\qquad$ $\mathrm{E}(X_2)=5$ og $\mathrm{SD}(X_2)=3$

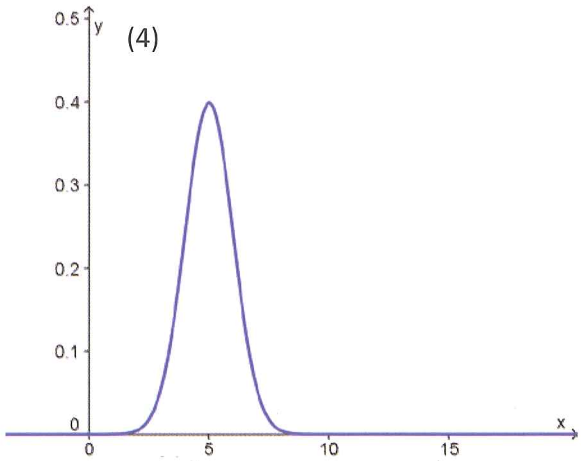
$\mathrm{E}(X_3)=10$ og $\mathrm{SD}(X_3)=3$ $\qquad$ $\mathrm{E}(X_4)=10$ og $\mathrm{SD}(X_4)=1$

a) Hvilke av de grafiske framstillingene nedenfor illustrerer $X_1$, $X_2$, $X_3$ og $X_4$? Begrunn svaret.




b) For den ene variabelen er $P(7 < X < 14) = 0{,}75$. Hvilken variabel er det? Begrunn svaret.

# DEL 2
## Med hjelpemidler

**Oppgave 1** (6 poeng)

En bedrift produserer og selger en vare. En markedsanalyse viser at etterspørselen $E$ kan skrives som

$$E(p) = 6000 - 4p$$

der $p$ er prisen i kroner per enhet.

a) Vis at grenseinntekten er gitt ved

$$I'(x) = 1500 - 0,5x$$

der $x = E(p)$ er antall solgte enheter av varen.

Bedriften regner med at kostnadene $K(x)$ kroner ved å produsere og selge $x$ enheter er gitt ved

$$K(x) = 0,02x^2 + 20x + 550000$$

b) Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge for at overskuddet skal bli størst mulig? Hva er prisen per enhet da?

c) Bedriften ønsker å øke sin markedsandel og vil derfor sette ned prisen, slik at flere kjøper produktet. Hva er den minste prisen bedriften kan sette for likevel å kunne gå i balanse?

## Oppgave 2 (7 poeng)

Et firma A importerer og selger et produkt. Antall solgte enheter per år kan beskrives ved modellen

$$f(x) = \frac{333}{1 + 1{,}45e^{-0{,}23x}}$$

der $x$ er antall år etter 2006.

a) Hvor mange enheter solgte firma A i 2012 ifølge denne modellen?

Et konkurrerende firma B importerer og selger et tilsvarende produkt. Antall solgte enheter per år i firma B ser du i tabellen nedenfor.

| Antall år etter 2006 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Antall solgte enheter per år | 135 | 154 | 176 | 192 | 211 | 228 | 243 |

b) Bestem ut fra disse tallene en logistisk modell som viser antall solgte enheter per år i firma B.

c) Hvilket firma vil i det lange løp selge flest enheter per år ifølge de to modellene?

d) Hvor mange enheter forventes det at hvert av de to firmaene importerer og selger totalt i årene fra og med 2006 til og med 2015?

## Oppgave 3 (6 poeng)

Svanhild vurderer å ta opp et annuitetslån på 600 000 kroner. Hun kan velge mellom en fast årlig rente på 3,5 % og flytende rente. Lånet har én termin per år med en nedbetalingstid på 20 år. Første innbetaling skjer om ett år.

a) Forklar hvorfor vi kan bestemme terminbeløpet ved en fast årlig rente på 3,5 % ved å løse følgende likning:

$$\frac{x}{1{,}035}\left(1+\frac{1}{1{,}035}+\frac{1}{1{,}035^2}+\ldots+\frac{1}{1{,}035^{19}}\right)=600000$$

Bestem terminbeløpet ved å løse denne likningen.

Svanhild vurderer å be banken om å endre lånebetingelsene.

b) Hva er den høyeste renten Svanhild kan ha dersom hun maksimalt kan betale 50 000 kroner i terminbeløp med 20 års nedbetalingstid?

Bankens rådgiver mener at Svanhild må kunne betale en fast årlig rente på 6,5 %. For at Svanhild skal klare en slik rente, må hun øke antall terminer. Lånet har fremdeles én termin per år.

c) Hvor mange terminer må Svanhild betale dersom terminbeløpet skal være mindre enn 50 000 kroner med en fast årlig rente på 6,5 %?

## Oppgave 4 (4 poeng)

Ifølge tall fra Statistisk sentralbyrå røykte 17 % av befolkningen i 2011. For å få ned dette tallet startet myndighetene en kampanje.

Etter at kampanjen var over, ville myndighetene undersøke om den hadde hatt effekt. 100 tilfeldig valgte personer over 16 år ble spurt om de røykte. Vi kan se på denne undersøkelsen som et binomisk forsøk.

Av de 100 som ble spurt, svarte 12 personer at de røykte.

a) Sett opp en passende nullhypotese og en alternativ hypotese for dette forsøket.

b) Avgjør om myndighetene har grunn til å tro at kampanjen hadde effekt. Bruk et signifikansnivå på 5 %.

## Oppgave 5 (7 poeng)

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x) = e^{-\frac{(x-5)^2}{2}}$$

a) Tegn grafen til $f$.

b) Bestem $f'(x)$. Bruk produktregelen og kjerneregelen for derivasjon, og vis at

$$f''(x) = (x^2 - 10x + 24)\,e^{-\frac{(x-5)^2}{2}}$$

Bruk dette resultatet til å bestemme koordinatene til vendepunktene på grafen til $f$.

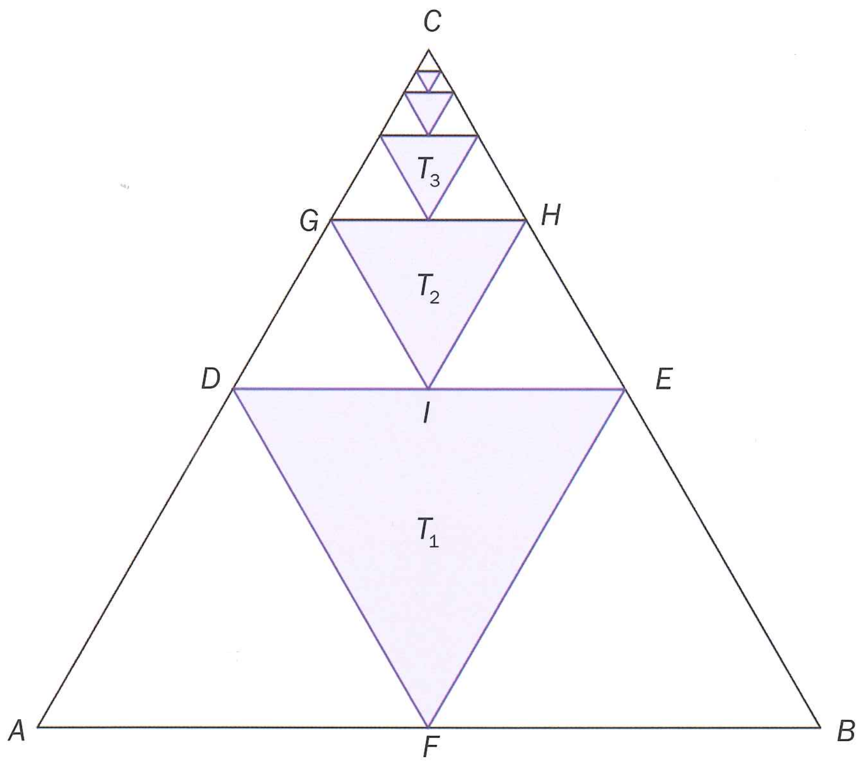
For en normalfordelt variabel $X$ med $\mu = 5$ og $\sigma = 1$ gjelder

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x)\,dx$$

c) Bruk integralet til å bestemme $P(a < X < b)$ der $a$ og $b$ er $x$-koordinatene til vendepunktene.

## Oppgave 6 (6 poeng)

En likesidet $\triangle ABC$ har areal lik $T$. Midtpunktene på sidene i $\triangle ABC$ er hjørnene i en ny likesidet $\triangle DEF$ med areal lik $T_1$. Midtpunktene på sidene i $\triangle CDE$ er hjørnene i en ny likesidet $\triangle GHI$ med areal lik $T_2$. Etter samme metode lager vi trekanter med areal $T_3$, $T_4$, og så videre. Denne prosessen tenker vi oss fortsetter i det uendelige. Se skissen nedenfor.




a) Forklar at rekken av arealer $T_1 + T_2 + T_3 + \ldots$ kan skrives som

$$\frac{T}{4} + \frac{T}{16} + \frac{T}{64} + \ldots$$

b) Vis ved regning eller ved å studere figuren at summen av rekken er lik $\frac{T}{3}$.

c) Omkretsen av $\triangle ABC$ er lik 3. Trekanten som har areal lik $T_n$, har omkrets lik $O_n$.

Forklar at rekken av omkretser $O_1 + O_2 + O_3 + \ldots$ kan skrives som

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \ldots$$

Bestem summen til rekken.