

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = e^{-2x}$

b) $g(x) = \frac{x-3}{x-4}$

c) $h(x) = x(x-3)^6$

Oppgave 2 (8 poeng)

Polynomet P er gitt ved

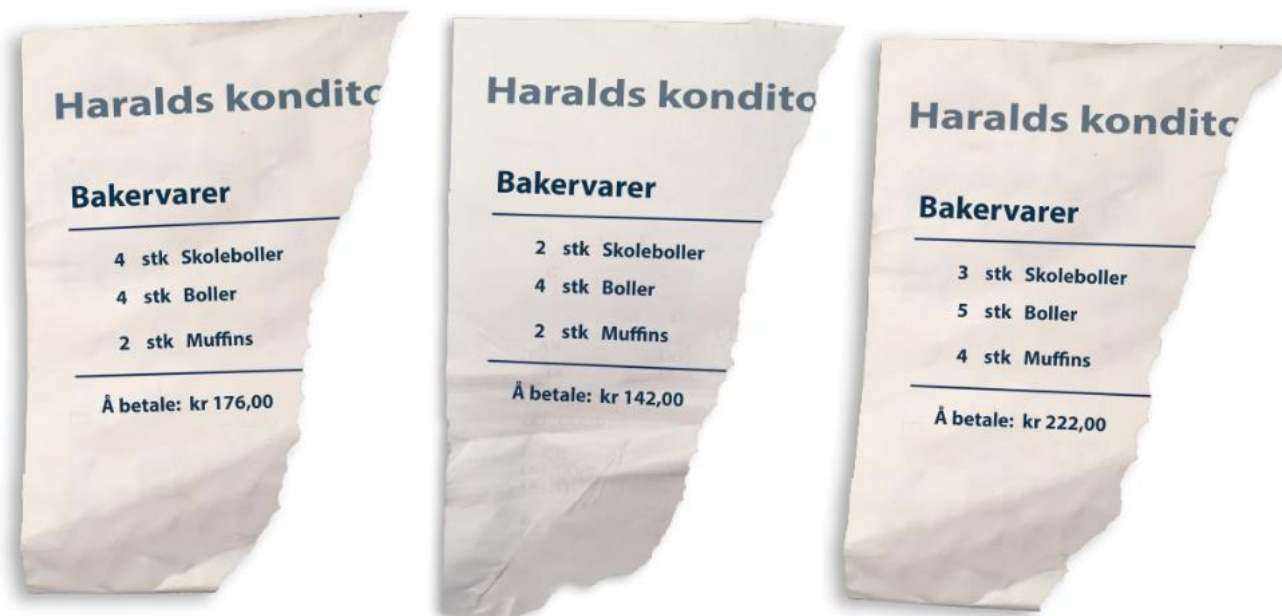
$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 32$$

- a) Vis at $P(x)$ er delelig med $(x+2)$. Bestem nullpunktene til P .
- b) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til P .
- c) Bestem eventuelle vendepunkt på grafen til P .
- d) Lag en skisse av grafen til P .

Oppgave 3 (3 poeng)

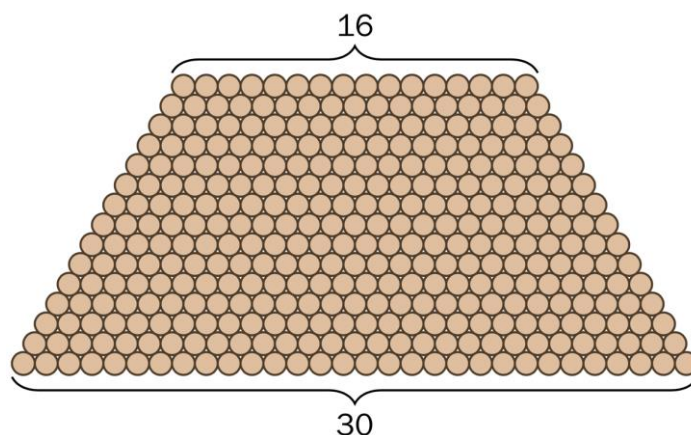
Mathias har handlet litt mye på et konditori i det siste. Dessverre har han vært uheldig og fått revet av deler av kvitteringene, slik at han ikke lenger vet hvor mye de enkelte bakervarene koster. Se bildet nedenfor.

Bruk opplysningene på kvitteringene til å sette opp et likningssystem, og bruk dette til å bestemme prisen på skoleboller, boller og muffins.



Oppgave 4 (4 poeng)

- a) Noen tømmerstokker er stablet slik figuren viser. Det er 16 stokker i øverste rad og 30 i nederste. Bruk teorien for rekker til å bestemme hvor mange stokker det er i haugen.



- b) I en aritmetisk tallfølge er $a_4 = 11$ og $a_7 = 20$.
Bestem a_{40} .

Oppgave 5 (5 poeng)

- a) Hva vil det si at en rekke er geometrisk? Hva vil det si at en rekke er aritmetisk?
- b) En geometrisk rekke er gitt ved

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = 10 + 5 + \frac{5}{2} + \dots$$

Skriv et uttrykk for a_k .

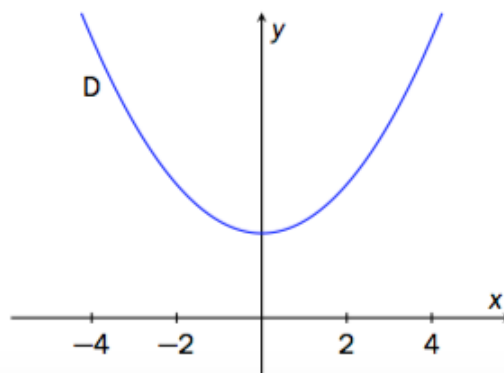
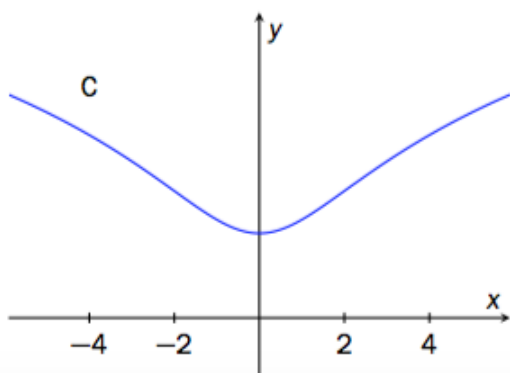
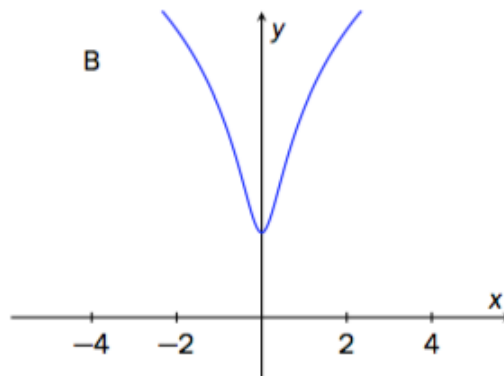
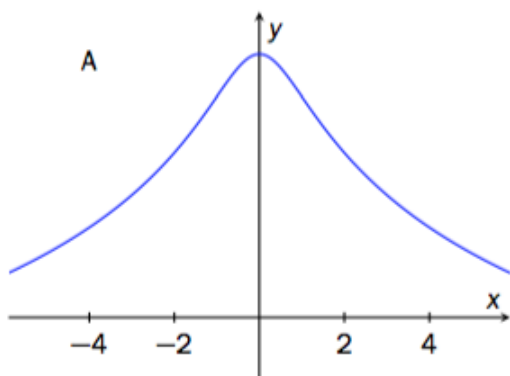
- c) Sett $b_k = \ln a_k$. Vis at rekken $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ er aritmetisk.
Bestem differansen $d = b_{k+1} - b_k$.

Oppgave 6 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \ln(x^2 + 4), \quad x \in \mathbb{R}$$

- a) Avgjør hvor grafen til f stiger, og hvor grafen til f synker.
- b) Nedenfor har vi tegnet fire grafer. Én av dem er grafen til f . Gjør nødvendige drøftinger og beregninger for å bestemme hvilken av grafene som er grafen til f .



Oppgave 7 (3 poeng)

En stokastisk variabel X har følgende sannsynlighetsfordeling:

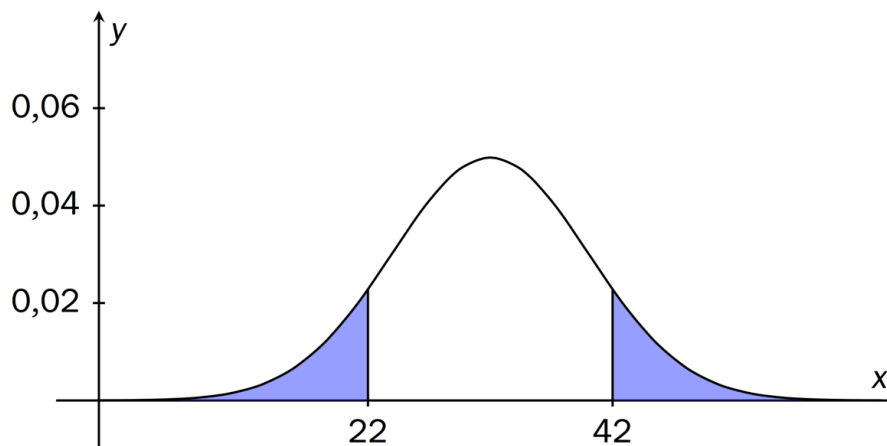
x	0	10	20
$P(X = x)$	0,2	0,5	a

- Bestem a .
- Regn ut forventningsverdien μ og standardavviket σ til X .

Oppgave 8 (4 poeng)

I denne oppgaven kan du få bruk for tabellen over standard normalfordeling i vedlegg 1.

Figuren nedenfor viser en grafisk framstilling av en normalfordelt stokastisk variabel X . De to skraverte områdene har begge areal lik 0,106.



- Bestem $P(22 < X < 42)$
- Bestem forventningsverdien til X .
- Bestem standardavviket til X .

DEL 2

Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Tabellen nedenfor viser det totale antallet artikler som var tilgjengelige på Wikipedia noen utvalgte år.

År	2002	2004	2006	2008	2010	2012
Antall artikler	19 700	188 800	895 000	2 153 000	3 144 000	3 835 000

Basert på disse tallene påstår en journalist at i 2020 vil antallet tilgjengelige artikler være rundt 7 millioner. En annen journalist påstår at antall artikler vil stabilisere seg på rundt 4 millioner.

- a) Vurder hvilke matematiske modeller journalistene kan ha brukt for å komme fram til disse tallene.

En modell for antall tilgjengelige artikler er gitt ved en funksjon g . Økningen av antall artikler (i millioner) per år er ifølge denne modellen

$$g'(x) = \frac{576 e^{-0.68x}}{(1 + 211e^{-0.68x})^2}$$

Her er x antall år etter 2000.

- b) Bruk graftegner til å bestemme hvilket år antall artikler vokste raskest, ifølge denne modellen.

- c) Bestem $\int_0^{15} g'(x) dx$

Hva er den praktiske tolkningen av dette svaret?

Oppgave 2 (6 poeng)

En bedrift produserer og selger x enheter av en vare per dag. Det viser seg at inntekten I i kroner per dag er gitt ved

$$I(x) = 3200 \cdot \ln(2,5x + 1) \quad , \quad x \geq 0$$

Kostnaden K i kroner per dag kan skrives på formen

$$K(x) = ax^2 + bx + c$$

Erfaringer viser at

- det koster i alt 3225 kroner å produsere 50 enheter per dag
- det koster i alt 4900 kroner å produsere 100 enheter per dag
- grensekostnadene ved å produsere 100 enheter er 41 kroner per enhet

a) Bruk CAS til å bestemme a , b og c . Vis at

$$K'(x) = 0,3x + 11$$

b) Bestem $I'(100)$ og $K'(100)$. Hva forteller svarene oss?

Avgjør ut fra svarene om bedriften bør produsere flere eller færre enn 100 enheter per dag.

c) Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge per dag for at overskuddet skal bli størst mulig?

Oppgave 3 (6 poeng)

Ved valget i 2015 fikk et bestemt politisk parti en oppslutning på 30,8 % i en stor kommune. Like etter valget ble 1000 personer med stemmerett i kommunen valgt ut tilfeldig og spurt om hvilket parti de ville ha stemt på dersom det var nytt valg.

La X være antallet som stemte på det førstnevnte partiet, blant 1000 tilfeldig valgte personer.

- Forklar hvorfor vi kan anta at X er normalfordelt.
- Bestem forventningsverdien og standardavviket til X .

I mai 2016 ble også 1000 personer med stemmerett i kommunen valgt ut tilfeldig og spurt om hvilket parti de ville ha stemt på dersom det var nytt valg. Av disse svarte 334 personer at de ville ha stemt på det førstnevnte partiet.

- Vurder om dette gir grunnlag for å si at oppslutningen om dette partiet har økt.

Oppgave 4 (6 poeng)

Da Ole Magnus ble født, ønsket foreldrene å åpne en sparekonto for ham med en fast årlig rente på 2,5 %. De ønsket at det skulle være 100 000 kroner på kontoen når han fylte 18 år.

- Hvor stort engangsbeløp måtte foreldrene sette inn på kontoen dersom det skulle vokse til 100 000 kroner i løpet av de 18 årene?

Foreldrene vurderte i stedet å sette inn 18 like store årlige beløp, første gang da Ole Magnus ble født.

- Bruk CAS til å bestemme hvor stort dette årlige beløpet måtte være.

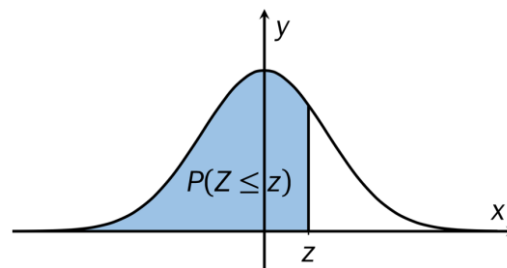
Foreldrene vurderte også en spareplan med 18 årlige innskudd, der beløpet som ble satt inn, økte med 2,0 % hvert år.

- Bruk CAS til å bestemme hvor stort det første beløpet måtte være.

Vedlegg 1

Standard normalfordeling

Tabellen viser $P(Z \leq z)$ for $-3,09 \leq z \leq 3,09$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990